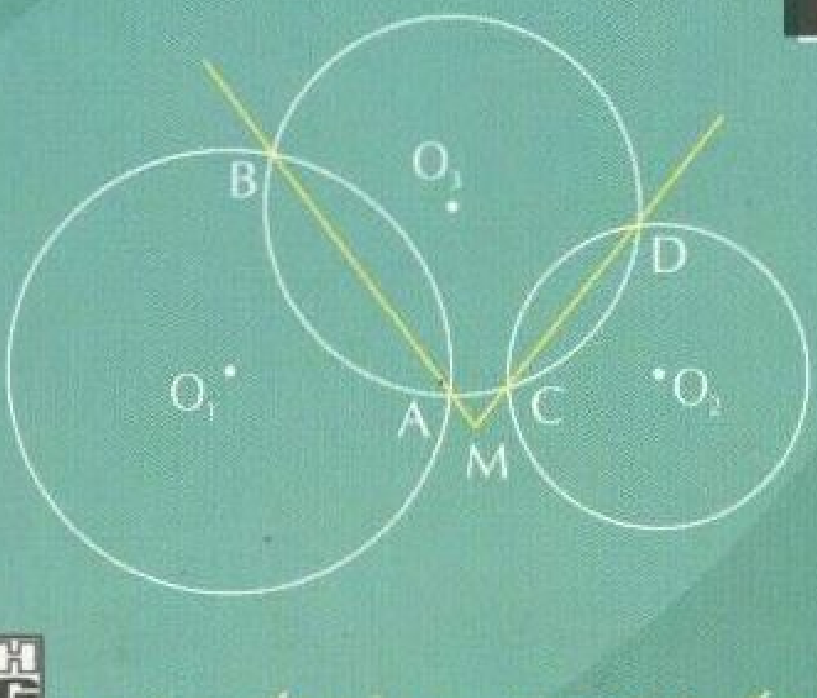
NGUYỄN VĨNH CẬN

ĐỂ HỌC TỐT
HÌNH HỌC
THPT 10


B
O_3
D
O_1
A
M
C
O_2

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VĨNH CẬN

ĐỂ HỌC TỐT
HÌNH HỌC THPT 10

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chương I

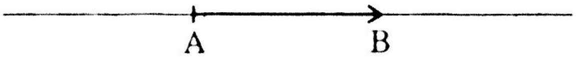
VECTƠ

§1. Các định nghĩa

I. Vectơ

a) Định nghĩa

– *Vectơ là một đoạn thẳng định hướng.*



A là điểm đầu, B là điểm cuối (điểm ngọn) của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Đường thẳng AB chứa vectơ $\overrightarrow{AB}$ *được gọi là* ***giá*** *của vectơ* $\overrightarrow{AB}$.

b) Xác định vectơ

Một vectơ, chẳng hạn vectơ $\overrightarrow{AB}$ *được xác định bởi :*

– ***Phương*** *: Phương của vectơ* $\overrightarrow{AB}$ *là phương của đường thẳng AB.*

– ***Hướng*** *: Hướng vectơ* $\overrightarrow{AB}$ *là hướng từ A (điểm đầu) đến B (điểm cuối).*

– ***Độ dài*** *: Độ dài của vectơ* $\overrightarrow{AB}$, *kí hiệu là* $|\overrightarrow{AB}|$ *là độ dài của đoạn thẳng AB.*

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}|$ *là một số thực, không âm.*

c) Vectơ không – $\vec{0}$

Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau được gọi là vectơ không, kí hiệu $\vec{0}$.

Chẳng hạn : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

Vectơ không – $\vec{0}$ *có phương, hướng tùy ý và có độ dài bằng 0. Ngược lại, một vectơ có phương hướng tùy ý thì nó là vectơ không* $\vec{0}$.

2. Vectơ cùng phương – cùng hướng – ngược hướng

- *Hai vectơ cùng phương là hai vectơ có giá song song hoặc trùng nhau.*
- *Hai vectơ cùng phương thì có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.*

Ta chỉ xét đến tính cùng hướng hoặc ngược hướng của hai vectơ khi chúng cùng phương.

3. Vectơ bằng nhau

Hai vectơ bằng nhau khi chúng ***cùng hướng*** *và* ***cùng độ dài.***

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\ \vec{b} \text{ cùng hướng} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$$

Quan hệ bằng nhau của hai vectơ có tính chất bắc cầu, nghĩa là hai vectơ cùng bằng một vectơ thứ ba thì bằng nhau.

$$\vec{a} = \vec{c} \quad \text{và} \quad \vec{b} = \vec{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{b}.$$

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 1. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C.

a) Có bao nhiêu vectơ mà điểm đầu và điểm cuối là hai trong ba điểm ấy.

b) Xét quan hệ giữa các vectơ có được trong trường hợp 3 điểm A, B, C thẳng hàng và điểm B nằm giữa hai điểm A, C.

Hướng dẫn

a) Cứ mỗi điểm thì nối với 2 điểm còn lại để được 2 vectơ có điểm đầu là điểm nói trên. Ta có tất cả 3 điểm.

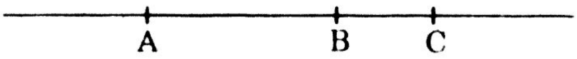
Vậy có : 2.3 = 6

Có tất cả 6 vectơ, đó là các vectơ : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CB}$.

Trong 6 vectơ này, ta có các cặp vectơ ngược hướng :

$$\overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{BA};\quad \overrightarrow{BC} \text{ và } \overrightarrow{CB};\quad \overrightarrow{AC} \text{ và } \overrightarrow{CA}.$$

b) Khi ba điểm A, B, C thẳng hàng và điểm B nằm giữa hai điểm A, C ta có :



- Cả 6 vectơ đều cùng phương.

- Hai nhóm vectơ cùng hướng : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

- Các cặp vectơ ngược hướng :

$\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Bài 2. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD là hình bình hành là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Hướng dẫn

Giả sử tứ giác ABCD là hình bình hành, như vậy :

$$AB \parallel DC \qquad (1)$$

$$\text{và} \quad AB = DC \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ngược lại, từ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ta suy ra $AB \parallel DC$ (3)

$$AB = DC \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D.

a Có bao nhiêu đoạn thẳng có hai đầu mút là hai trong bốn điểm đã cho.

b Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối là hai trong bốn điểm đã cho.

c So sánh số đoạn thẳng và số vectơ có được và giải thích tại sao ?

Gợi ý : a) 6 đoạn thẳng. b) 12 vectơ.

c Số vectơ gấp 2 lần số đoạn thẳng vì : Qua hai điểm thì có 1 đoạn thẳng nhưng có đến hai vectơ; chẳng hạn qua hai điểm A, B thì có một đoạn thẳng AB nhưng có đến hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$.

2. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D (không có 3 điểm nào thẳng hàng). Biết $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng :

a) ABCD là hình bình hành;

b) ABDC là hình bình hành;

c) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

d) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

Gợi ý : b) đúng.

3. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Chứng tỏ rằng :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Gợi ý : Chứng minh hai mệnh đề :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC};$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

Chú ý : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ hoặc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ thì tứ giác ABCD là hình bình hành.

4. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF cùng chung cạnh AB.

Chứng minh $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{FD}$.

Gợi ý : Ta có $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AB}$.

5. Trong các mệnh đề sau đây, mệng đề nào đúng, mệnh đề nào sai :

a) Hai vectơ bằng nhau thì có độ dài bằng nhau;

b) Hai vectơ có độ dài bằng nhau thì bằng nhau;

c) Hai vectơ bằng nhau thì cùng phương;

d) Hai vectơ cùng phương thì bằng nhau;

e) Hai vectơ cùng hướng thì bằng nhau;

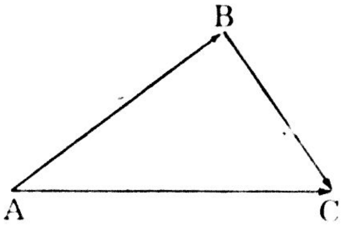
f) Hai vectơ bằng nhau thì cùng hướng.

Gợi ý : a, c, f : đúng;

b, d, e : sai.

§2. Các phép toán vectơ

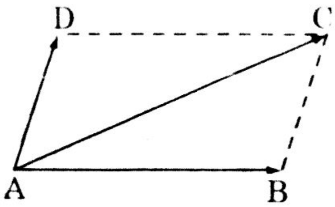
1.. Tổng hai vectơ



a) ***Quy tắc 3 điểm*** *(quy tắc tam giác)*

Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$



b) ***Quy tắc hình bình hành***

Nếu ABCD là hình bình hành thì ta luôn có :

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}.$$

c) ***Tính chất của tổng vectơ***

Tổng vectơ có tính chất giao hoán, kết hợp và tính chất :

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

d) ***Trung điểm của đoạn thẳng***

I là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}.$

e) ***Trọng tâm của tam giác***

G là trọng tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

2.. Hiệu của hai vectơ

a) ***Vectơ đối***

– *Vectơ đối của vectơ* $\vec{a}$, *kí hiệu* $-\vec{a}$ *là vectơ ngược hướng với vectơ* $\vec{a}$ *và có cùng độ dài với vectơ* $\vec{a}$.

– *Vectơ đối của vectơ* $\vec{0}$ *là vectơ* $\vec{0}$.

– *Tổng của hai vectơ đối nhau thì bằng vectơ* $\vec{0}$:

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

b) ***Hiệu của hai vectơ***

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

c) Quy tắc 3 điểm của hiệu vectơ

Cho 3 điểm A, B, C bất kì; ta luôn có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

3. Tích của một vectơ với một số

a) Định nghĩa

Tích của vectơ $\vec{a}$ *với một số thực k là một vectơ, kí hiệu* $k\vec{a}$, *được xác định như sau :*

- *Nếu* $k \geq 0$ *thì* $k\vec{a}$ *cùng hướng với* $\vec{a}$;
- *Nếu* $k < 0$ *thì* $k\vec{a}$ *ngược hướng với* $\vec{a}$;
- *Độ dài của* $k\vec{a}$ *bằng* $|k|.|\vec{a}|$:

$$|k\vec{a}| = |k|.|\vec{a}|.$$

b) Tính chất

- *Tính chất kết hợp đối với phép nhân các số thực :*

$$k.(l\vec{a}) = (k.l)\vec{a};$$

- *Tính chất phân phối đối với phép cộng các số thực :*

$$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a};$$

- *Tính chất phân phối đối với phép cộng các vectơ :*

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b};$$

- $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ *hoặc* $\vec{a} = \vec{0}$.

c) Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Vectơ $\vec{b}$ *cùng phương với vectơ* $\vec{a}$, $(\vec{a} \neq \vec{0})$ *khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho* $\vec{b} = k\vec{a}$.

Hệ quả : *Điều kiện để 3 điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là tồn tại một số k sao cho* $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

d) Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Định lí : *Cho hai vectơ không cùng phương* $\vec{a}$, $\vec{b}$. *Mọi vectơ* $\vec{x}$ *đều* *có thể biểu thị một cách duy nhất qua hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$; nghĩa là tồn tại duy nhất một cặp số m, n sao cho :*

$\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ *với m, n không đồng thời bằng 0.*

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 3 Cho hai điểm phân biệt A, B và I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

a) Chứng minh rằng với mọi điểm M trong mặt phẳng ta có hệ thức :

$$2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \qquad (*)$$

b) Xét sự biến đổi của hệ thức (*) khi M ≡ I; M ≡ A; M ≡ B.

Hướng dẫn

a) Theo quy tắc 3 điểm của tổng vectơ, ta có :

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \;;$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$$

$$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\,.$$

Theo tính chất kết hợp cua tổng vectơ, ta có :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})\,.$$

Vì I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ và theo tính chất của vectơ $\vec{0}$, ta có : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ (*)

b) – Khi M ≡ I thì (*) trở thành $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{II} \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

– Khi M ≡ A thì (*) trở thành $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$.

– Khi M ≡ B ta có : $2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$.

Chú ý : Từ các kết quả trên, ta có kết luận :

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$2\,\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}\,; \quad 2\,\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB} \qquad (2)$$

Với mọi điểm M trong mặt phẳng :

$$2\,\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \qquad (3)$$

Các hệ thức (1), (2), (3) thường được sử dụng để chứng minh một điểm là trung điểm của một đoạn thẳng.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức vectơ :

$$\overrightarrow{IA} = k.\,\overrightarrow{BI} \text{ với } k \in R \text{ và } k \neq -1.$$

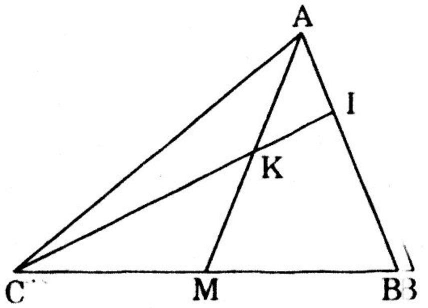
a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{CI}$ theo các vectơ $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$.

c) Gọi M là trung điểm của cạnh BC và K là trung điểm của đoạn thẳng AM.

Chứng minh rằng với $k = \frac{1}{2}$ thì ba điểm C, I, K thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) Theo quy tắc 3 điểm, ta có :

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}.$$

Theo giả thiết, $\overrightarrow{IA} = k\,\overrightarrow{BI}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{IA} = k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{IA} = k\,\overrightarrow{BA} + k.\,\overrightarrow{AI}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{IA} - k\,\overrightarrow{AI} = k\,\overrightarrow{BA} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{IA}(1+k) = k.\,\overrightarrow{BA}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AI}(1+k) = k\,\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AI} = \frac{k}{1+k}.\,\overrightarrow{AB}.$$

b) Ta có : $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CA} + \frac{k}{1+k}.\,\overrightarrow{AB}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ nên :

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \frac{k}{1+k}.\,\overrightarrow{CB} - \frac{k}{1+k}.\,\overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CI} = \frac{1}{1+k}.\overrightarrow{CA} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{CB} \qquad (1)$$

c) K là trung điểm của AM nên :

$$2\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \quad \Rightarrow \quad 2\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) \qquad (2)$$

Với $k = \frac{1}{2}$ thì hệ thức (1) cho ta :

$$\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra : $\overrightarrow{CI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CK}$.

Hai vectơ $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{CK}$ là hai vectơ cùng phương suy ra ba điểm C, I, K thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Gọi A', B', C' theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh hệ thức $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GA'}$.

Suy ra hệ thức $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b) M là một điểm bất kì trong mặt phẳng.

Chứng minh hệ thức $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

c) P là một điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

Chứng minh bốn điểm A, G, A', P thẳng hàng.

d) Chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'C}$;

$$\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GA'} + (\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'B}).$$

Vì A' là trung điểm của cạnh BC nên $\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'B} = \vec{0}$.

Vậy : $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GA'}$ (1)

Vì G là trọng tâm của ΔABC nên GA = 2GA'.

Từ đây ta có : $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra :

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

b) Ta có : $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG}$;

$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BG}$;

$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CG}$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

Vì G là trọng tâm của ΔABC nên : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Suy ra $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

c) Kết hợp $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GP}$ với $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$

Ta suy ra $\overrightarrow{GP} = 2\overrightarrow{GA'}$ hay hai vectơ $\overrightarrow{GP}$ và $\overrightarrow{GA'}$ là hai vectơ cùng phương, suy ra G, P, A' thẳng hàng. Từ đây suy ra đpcm.

d) Ta có : $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$;

$\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$;

$\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}.$$

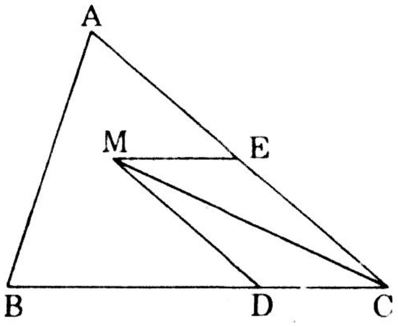
Đẳng thức cuối cùng này chứng tỏ G là trọng tâm của tam giác A'B'C'.

Bài 6. Cho tam giác ABC; M là điểm thỏa mãn hệ thức :

$$\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MA} = \vec{0}.$$

a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MC}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

b) Xác định vị trí điểm M.



Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}$;

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CM}$.

Thế vào vế trái hệ thức đã cho, ta được :

$$\overrightarrow{MC} + 2(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}) + 3(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CM}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad 6\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

b) Gọi D là điểm mà $CD = \frac{1}{3}CB \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

E là trung điểm của AC thì : $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

Theo kết quả câu a) ta có : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}$.

Vậy M là đỉnh thứ tư của hình bình hành CDME.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD, tâm I. Gọi E, F theo thứ tự là các trung điểm các cạnh AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức vectơ $3\overrightarrow{IP} = -\overrightarrow{IA}$.

a) Xác định vị trí điểm P.

b) Chứng minh hệ thức : $3\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

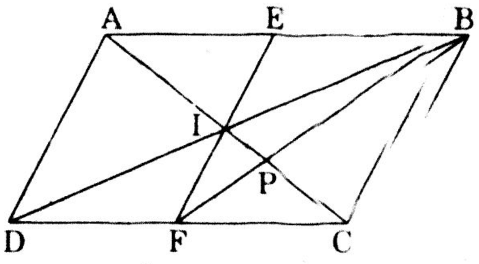
c) Chứng minh ba điểm B, P, F thẳng hàng.

d) Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng EF.

Hướng dẫn

a) Từ đẳng thức : $3\overrightarrow{IP} = -\overrightarrow{IA}$ ta suy ra hai vectơ $\overrightarrow{IP}$ và $\overrightarrow{IA}$ là hai vectơ ngược hướng.

Ta lại có : $IP = \frac{1}{3} IA$, $\quad IP = \frac{1}{3} IC$.



Vậy P là điểm nằm trên đoạn thẳng IC và thỏa mãn hệ thức :

$$\frac{IP}{IC} = \frac{1}{3}.$$

b) Ta có : $\quad 3\overrightarrow{IP} = -\overrightarrow{IA} \quad \Rightarrow \quad 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AP}) = -\overrightarrow{IA}$

$$\Rightarrow \quad 4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AP} = \vec{0}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ nên :

$$4.\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) + 3\overrightarrow{AP} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 3\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

c) Do : $IP = \frac{1}{3} IC \quad \Rightarrow \quad AP = \frac{2}{3} AC \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$;

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC};$$

mà $\quad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \qquad (1)$

F là trung điểm của DC nên : $\quad 2\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$.

Vì $\quad \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad$ nên $\quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$.

Đẳng thức này chứng tỏ hai vectơ $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{BF}$ cùng phương hay ba điểm B, P, F thẳng hàng.

d) Ta có : $\quad 2\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$;

$$2\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC}$$

$$\Rightarrow \quad 2(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}) = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}).$$

Vì I là trung điểm của AC và cũng là trung điểm của BD nên :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0};$$

$$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$

Do đó suy ra : $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \vec{0}$.

Đẳng thức cuối cùng chứng tỏ I là trung điểm của đoạn thẳng EF.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho hình bình hành ABCD tâm là điểm I, M và N là 2 điểm thỏa mãn các hệ thức :

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}; \qquad \overrightarrow{CN} + k\,\overrightarrow{DC} = \vec{0}.$$

a) Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng MN.

b) Chứng minh tứ giác AMCN là hình bình hành.

Gợi ý : a) Chứng minh $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

2. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC, P và Q là hai điểm thỏa mãn các hệ thức vectơ :

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} - 2\,\overrightarrow{AB};$$

$$\overrightarrow{CQ} = k\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \qquad (k \in R)$$

a) Xác định vị trí điểm P.

b) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

c) Xác định giá trị k để ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

d) Xác định giá trị k để đường thẳng PQ đi qua trung điểm M của cạnh BC.

Gợi ý : b) $\overrightarrow{AP} = -2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + k.\overrightarrow{AC}$.

c) $k = -\dfrac{1}{2}$.

d) Tìm điều kiện để $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{MQ}$ cùng phương. Suy ra $k = \dfrac{2}{5}$.

3. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh AB và D, E, F là ba điểm thỏa mãn các hệ thức :

$$3\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DC}; \qquad \overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EC}; \qquad 5\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}.$$

a) Dựng các điểm D, E, F.

b) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh tứ giác BCEM là hình bình hành.

d) Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

e) Chứng minh ba đường thẳng AD, BC, MF đồng quy.

Gợi ý : b) $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

c) $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BC}$.

d) Chứng minh $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AE}$ cùng phương.

e) Chứng minh $\overrightarrow{DF}$ và $\overrightarrow{MF}$ cùng phương suy ra D, M, F thẳng hàng, suy ra đpcm.

4. Cho tam giác ABC và hai điểm D, E được xác định bởi các hệ thức :

$$\overrightarrow{DB} = k.\overrightarrow{DC}; \qquad \overrightarrow{EB} = \frac{1}{k}\overrightarrow{EC} \qquad (k \neq 1)$$

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh hai tam giác ABC và ADE có cùng trọng tâm.

c) Hai điểm F, I thỏa mãn các hệ thức :

$$\overrightarrow{FA} = k\,\overrightarrow{FB}; \qquad \overrightarrow{IC} = k\,\overrightarrow{IA}.$$

Chứng minh hệ thức $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

Gợi ý : a) $\overrightarrow{AD} = \dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{k-1}\overrightarrow{AB}$;

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{k-1}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AB};$$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{k+1}{k-1}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}).$$

b) Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Hãy chứng minh :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

5. Cho bốn điểm A, B, C, D. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD và M, N theo thứ tự là trung điểm của các đường chéo AC, BD.

a) Chứng minh các hệ thức : $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

b) Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng EF.

Chứng minh hệ thức : $4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

c) Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

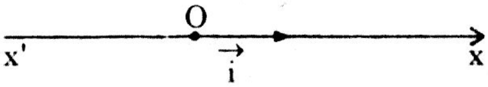
§3. Trục tọa độ

1. Trục tọa độ

Định nghĩa

Trục tọa độ là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O, gọi là điểm gốc, và một vectơ đơn vị $\vec{i}$.

Kí hiệu trục : $(O; \vec{i})$.



2. Tọa độ của vectơ và của điểm trên trục

- *Vectơ* $\vec{u}$ *nằm trên trục* $(O; \vec{i})$ *có tọa độ a :*

$$\vec{u}(a) \Leftrightarrow \vec{u} = a.\vec{i}.$$

- *Điểm M nằm trên trục* $(O; \vec{i})$ *có tọa độ m :*

$$M(m) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = m\,\vec{i}.$$

Dễ thấy tọa độ của điểm M cũng là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/1605

3. Độ dài đại số trên trục

Hai điểm A, B nằm trên trục $(O;\vec{i})$ *thì tọa độ của vectơ* $\overrightarrow{AB}$ *được gọi là* ***độ dài đại số*** *của* $\overrightarrow{AB}$ *và kí hiệu là* $\overline{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{i}.$$

Từ định nghĩa ta suy ra :

+ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}.$

+ *Hệ thức Chasles :* $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$;

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

+ *Nếu* $A(x_A)$; $B(x_B)$ *thì :* $\overline{AB} = x_B - x_A$.

4. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng trên trục

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì :

$$\overline{OI} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$$

Chú ý : *Khi làm toán, ta có thể sử dụng hệ thức Chasles dưới dạng mở rộng bằng cách "chèn" thêm các điểm trung gian, chẳng hạn :*

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EC}$$

và có thể sử dụng hai chiều : thay một tổng các đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng hoặc thay một đoạn thẳng bằng tổng các đoạn thẳng liên tiếp.

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 8. Cho bốn điểm A, B, C, D với A(3); B(−5); C(−2); D(2).

a) Tính $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

b) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BD}$ theo vectơ $\overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overline{OA} = 3$; $\overline{OB} = -5$; $\overline{OC} = -2$; $\overline{OD} = 2$.

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} \Rightarrow \overline{AB} = -\overline{OA} + \overline{OB}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = -3 + (-5) \Rightarrow \overline{AB} = -8.$$

Chú ý : Có thể tính : $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = -5 - 3 \Rightarrow \overline{AB} = -8$.

$\overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = 2 - (-2) = 4$.

b) Tương tự ta tính được : $\overline{BD} = 7 \Rightarrow \overrightarrow{BD} = 7.\vec{i}$;

$\overline{AD} = -1 \Rightarrow AD = -\vec{i}$.

Suy ra $\overrightarrow{BD} = -7\overrightarrow{AD}$.

Bài 9. Cho bốn điểm A, B, C, D biết : $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i}$; $\overrightarrow{OB} = 4\vec{i}$; $\overrightarrow{BC} = -2\vec{i}$ và D(−4).

a) Tính tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

b) Chứng minh hai đoạn thẳng AB và CD có chung trung điểm.

c) Minh họa kết quả trên hình vẽ.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overline{OI} = \dfrac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} \Rightarrow \overline{OI} = \dfrac{-2+4}{2} \Rightarrow \overline{OI} = 1$

$\Rightarrow$ I(1) (1)

b) $\overrightarrow{BC} = -2\vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + 2\vec{i}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + 2\vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = 6\vec{i} \Rightarrow \overline{OC} = 6$.

Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng CD, ta có :

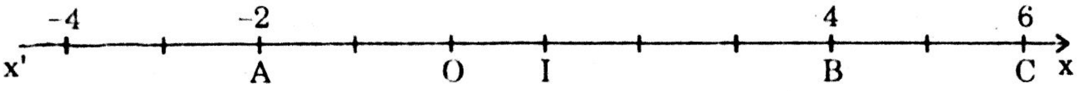
$\overline{OJ} = \dfrac{\overline{OC} + \overline{OD}}{2} \Rightarrow \overline{OJ} = \dfrac{6-4}{2} \Rightarrow \overline{OJ} = 1$

$\Rightarrow$ J(1) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{OI} = \overline{OJ} \Rightarrow I \equiv J$

Vậy I trung điểm của AB cũng là trung điểm của CD.

c) Ta có hình vẽ :



Bài 10. Cho hai điểm A, B với $x_A = -5$; $x_B = 7$.

Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $3\overline{MA} - 2\overline{MB} = 0$.

Hướng dẫn

Gọi tọa độ của M là x, ta có :

$$\overline{MA} = -5 - x;$$

$$\overline{MB} = 7 - x.$$

$$3\overline{MA} - 2\overline{MB} = 3(-5 - x) - 2(7 - x).$$

$$3(-5 - x) - 2(7 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 29 \quad \Rightarrow \quad M(29).$$

Bài 11. Trên trục tọa độ $(O; \vec{i})$ cho bốn điểm A, B, C, D. Gọi I, J, K, L theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AC; BD; AB; CD.

a) Chứng minh các hệ thức : $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{CB} = 2\overline{IJ}$;

$$\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC} = 2\overline{KL}.$$

b) Chứng minh hai đoạn thẳng IJ và KL có chung trung điểm.

Hướng dẫn

a) Ta áp dụng hệ thức Chasles mở rộng :

$$\overline{IJ} = \overline{IA} + \overline{AB} + \overline{BJ} = \overline{IA} + \overline{AD} + \overline{DJ};$$

$$\overline{IJ} = \overline{IC} + \overline{CD} + \overline{DJ} = \overline{IC} + \overline{CB} + \overline{BJ}.$$

Cộng các đẳng thức trên vế với vế ta có :

$$2\overline{IJ} = \overline{IA} + \overline{IC} + \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BJ} + \overline{DJ}$$

$$= \overline{IA} + \overline{IC} + \overline{AD} + \overline{CB} + \overline{DJ} + \overline{BJ}.$$

Vì I là trung điểm của AC nên : $\overline{IA} + \overline{IC} = 0$;

J là trung điểm của BD nên : $\overline{BJ} + \overline{DJ} = 0$.

Từ các kết quả trên, ta có : $2\overline{IJ} = \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{CB}$.

Hệ thức thứ hai cũng được chứng minh tương tự.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng IJ, ta có :

$$2\overline{OM} = \overline{OI} + \overline{OJ} \qquad (1)$$

Vì I là trung điểm của AC nên : $\overline{OI} = \dfrac{\overline{OA} + \overline{OC}}{2}$ (2)

J là trung điểm của BD nên : $\overline{OJ} = \dfrac{\overline{OB} + \overline{OD}}{2}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có : $2\overline{OM} = \dfrac{\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OB} + \overline{OD}}{2}$

$\Rightarrow \quad 2\overline{OM} = \dfrac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} + \dfrac{\overline{OC} + \overline{OD}}{2}$ (4)

Vì K là trung điểm của AB nên : $\overline{OK} = \dfrac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$ (5)

Vì L là trung điểm của CD nên : $\overline{OL} = \dfrac{\overline{OC} + \overline{OD}}{2}$ (6)

Từ (4), (5), (6) ta suy ra : $2\overline{OM} = \overline{OK} + \overline{OL}$ (7)

Đẳng thức (7) này chứng tỏ M cũng là trung điểm của KL.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho ba điểm A, B, C biết $x_A = 2{,}1$; $x_B = -3{,}6$ và $\overline{BC} = -5{,}7$.

Tìm tọa độ các trung điểm I, J, K của các đoạn thẳng AB, BC, CA.

2. Cho hai điểm A, B biết $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i}$ và trung điểm I của đoạn thẳng AB có tọa độ $x_I = -\dfrac{2}{3}$. Tính độ dài đại số của đoạn thẳng AB.

3. Cho hai điểm A, B có $x_A = 2$, $x_B = -1$.

a) Tính $\overline{AB}$; $\overline{BA}$ và AB.

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

c) Tìm tập hợp :
- các điểm M sao cho $\overline{AM} \le 0$;
- các điểm N sao cho $\overline{BN} > 0$;
- các điểm P sao cho $\overline{AP} > 0$?

4. Trên trục số $(O; \vec{i})$ cho hai điểm A, B biết $\overrightarrow{OA} = 5\vec{i}$; $\overrightarrow{OB} = -3\vec{i}$.

a) Tính $\overline{AB}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng OA, trung điểm J của đoạn thẳng OB và trung điểm K của đoạn thẳng AB.

c) Xác định tọa độ điểm C trên trục $(O; \vec{i})$ thỏa mãn điều kiện :

$$2\overline{CA} - 5\overline{CB} = 0.$$

d) Gọi P là một điểm bất kì của trục $(O; \vec{i})$. Chứng minh hệ thức :

$$2\overline{PA} - 5\overline{PB} = -3\overline{PC}.$$

5. Trên trục $(O; \vec{i})$ cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh các hệ thức :

a) $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$.

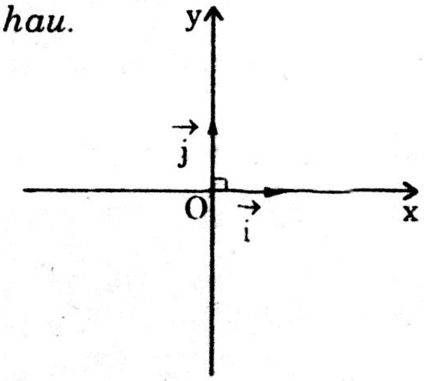
b) $\overline{AB}^2.\overline{CD} + \overline{AC}^2.\overline{DB} + \overline{AD}^2.\overline{BC} + \overline{CD}.\overline{DB}.\overline{BC} = 0$.

Gợi ý : Chọn gốc tọa độ là điểm A và đặt A(0); B(b); C(c); D(d).

§4. Hệ trục tọa độ

1. Hệ tọa độ

Hệ trục tọa độ gồm hai trục vuông góc với nhau.



Trục nằm ngang Ox với vectơ đơn vị $\vec{i}$ *gọi là trục hoành. Trục thẳng đứng Oy với vectơ đơn vị* $\vec{j}$ *gọi là trục tung.*

Hệ trục tọa độ vuông góc được kí hiệu Oxy hoặc $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Mặt phẳng có trang bị một hệ tọa độ được gọi là mặt phẳng tọa độ.

2. Tọa độ của vectơ

Trong hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$ *nếu* $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ *thì cặp số* $(x; y)$ *được gọi là tọa độ của vectơ* $\vec{a}$.

$$\vec{a}(x; y) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Từ định nghĩa, ta suy ra :

$$\vec{a}(x; y) = \vec{b}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y'. \end{cases}$$

3. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho $\vec{a}(x; y)$ *và* $\vec{b}(x'; y')$.

a) $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y')$;

$\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y')$

b) $k\vec{a} = (kx; ky)$ với $k \in R$.

c) Điều kiện để $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương : $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ (với $x' \neq 0; y' \neq 0$).

4. Tọa độ của điểm

$$M(x ; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Từ đây, ta có $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ *thì* $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

5. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm của tam giác.

a) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng

$I(x_I; y_I)$ *là trung điểm của đoạn thẳng AB :*

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}; \qquad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

b) Tọa độ trọng tâm của tam giác

$G(x_G; y_G)$ *là trọng tâm của* ΔABC :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \qquad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

6. Tọa độ điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k

Cho đoạn thẳng AB và một số thực k. Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k là điểm M thỏa mãn hệ thức vectơ :

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}.$$

Từ đây, ta suy ra :

$$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}; \qquad y_M = \frac{y_A - y_B}{1 - k}.$$

Đặc biệt, khi k = –1 thì M là trung điểm của đoạn thẳng AB và ta tìm lại được công thức cho tọa độ trung điểm của đoạn thẳng.

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 12. Cho bốn điểm A(0; –2); B(3; 0); $D\left(4; \frac{2}{3}\right)$; $E\left(2; -\frac{2}{3}\right)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, D thẳng hàng.

b) Chứng minh điểm E thuộc đoạn thẳng AB.

Hướng dẫn

a) Xét hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$, ta có :

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 0; 0 + 2) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = (3; 2);$$

$$\overrightarrow{AD} = \left(4 - 0; \frac{2}{3} + 2\right) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AD} = \left(4; \frac{8}{3}\right).$$

Vì $\frac{4}{3} = \frac{\frac{8}{3}}{2}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ cùng phương. Hai vectơ này lại có chung điểm A nên giá của chúng phải trùng nhau hay ba điểm A, B, D cùng thuộc một đường thẳng.

Chú ý : Ta cũng có thể biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo vectơ $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ và suy ra hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

b) Xét hai vectơ $\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}$; ta có :

$$\overrightarrow{EA} = \left(0 - 2; -2 + \frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{EA} = \left(-2; -\frac{4}{3}\right);$$

$$\overrightarrow{EB} = \left(3 - 2; 0 + \frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{EB} = \left(1; \frac{2}{3}\right).$$

Từ các kết quả trên, ta suy ra : $\overrightarrow{EA} = -2\overrightarrow{EB}$.

Đẳng thức này chứng tỏ hai vectơ $\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}$ là hai vectơ ngược hướng, suy ra điểm E nằm giữa hai điểm A, B.

Ghi nhớ :

- Để chứng minh ba điểm A, B, D thẳng hàng, ta chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ cùng phương. Tất nhiên nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ không cùng phương thì ba điểm A, B, D không thẳng hàng.

Để chứng minh điểm E thuộc đoạn thẳng AB, ta chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$ ngược hướng.

Bài 13. Cho tam giác ABC biết A(2; 3); B(−1; 4) và trọng tâm G(−1; −2).

a) Tìm tọa độ đỉnh C.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh ba điểm A, G, M thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Ta có : $-1 = \dfrac{2 + (-1) + x_C}{3} \Rightarrow x_C = -4;$

$$-2 = \dfrac{3 + 4 + y_C}{3} \Rightarrow y_C = -13;$$

$$\Rightarrow C(-4; -13).$$

b) Ta có : $x_M = \dfrac{-1 - 4}{2} = -\dfrac{5}{2};\quad y_M = \dfrac{4 - 13}{2} = -\dfrac{9}{2};$

$$\Rightarrow M\left(-\dfrac{5}{2}; -\dfrac{9}{2}\right).$$

Xét hai vectơ $\overrightarrow{AM} = \left(-\dfrac{9}{2}; -\dfrac{15}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = -\dfrac{3}{2}(3; 5);$

$$\overrightarrow{AG} = (-3; -5) \Rightarrow \overrightarrow{AG} = -(3; 5);$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG}.$$

Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AG}$ cùng phương, suy ra ba điểm A, G, M thẳng hàng.

Bài 14. Cho hai điểm A(2; −4); B(−5; 1). Tìm tọa độ giao điểm C của đường thẳng AB với trục hoành độ.

Hướng dẫn

Điểm C nằm trên trục hoành nên tọa độ của C là (x; 0) : C(x; 0).

Điểm C nằm trên AB nên A; B; C là ba điểm thẳng hàng.

Ta xét hai vectơ : $\overrightarrow{AC} = (x - 2; 4);$

$$\overrightarrow{AB} = (-7; 5).$$

A, B, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ cùng phương :

$$\frac{x-2}{-7} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{18}{5} \quad \Rightarrow \quad C\left(-\frac{18}{5}; 0\right).$$

Bài 15. Cho hình bình hành ABCD.

Biết A(5; 4); $\overrightarrow{DC} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\overrightarrow{BC} = -6\vec{i} - 3\vec{j}$. Tính tọa độ các đỉnh B, C, D.

Hướng dẫn

Gọi tọa độ của B là (x; y) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (x-5; y-4)$.

Tứ giác ABCD là hình bình hành nên :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x-5=2 \\ y-4=3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 7; \quad y = 7 \quad \Rightarrow \quad B(7; 7).$$

Gọi tọa độ của C là (x', y') $\Rightarrow$ $\overrightarrow{BC} = (x'-7; y'-7)$.

Giả thiết cho $\overrightarrow{BC} = -6\vec{i} - 3\vec{j}$ nên :

$$\begin{cases} x'-7=-6 \\ y'-7=-3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x' = 1; y' = 4 \quad \Rightarrow \quad C(1; 4).$$

Gọi tọa độ của D là (x"; y") $\Rightarrow$ $\overrightarrow{DC} = (1-x''; 4-y'')$.

Kết hợp với $\overrightarrow{DC} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ta có :

$$\begin{cases} 1-x''=2 \\ 4-y''=3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x'' = -1; y'' = 1 \quad \Rightarrow \quad D(-1; 1).$$

Bài 16. Cho hai điểm A(7; −2); B(−3; 1).

a) Tìm điểm G thỏa mãn hệ thức : $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Chứng minh rằng ba điểm A, G, B thẳng hàng và điểm G nằm giữa hai điểm A, B.

b) Tìm điểm M chia trong đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn

a) Gọi tọa độ của G là (x; y).

$\overrightarrow{GA} = (7 - x; -2 - y)$;

$\overrightarrow{GB} = (-3 - x; 1 - y)$.

Đẳng thức đã cho tương ứng với : $\begin{cases} 3(7 - x) + 2(-3 - x) = 0 \\ 3(-2 - y) + 2(1 - y) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad G\left(3; -\dfrac{4}{5}\right)$.

Ta có : $\overrightarrow{GA} = \left(4; -\dfrac{6}{5}\right) = 2\left(2; -\dfrac{3}{5}\right)$;

$\overrightarrow{GB} = \left(-6; \dfrac{9}{5}\right) = -3\left(2; -\dfrac{3}{5}\right)$.

Dễ thấy $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ là hai vectơ cùng phương nên ba điểm A, G, B thẳng hàng.

Chú ý : Ta dễ dàng tính được : $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GB}$.

Hai vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$ là hai vectơ ngược hướng nên đỉnh G nằm giữa hai điểm A, B.

b) Ta có : $x_M = \dfrac{7 + \dfrac{3}{2}(-3)}{1 + \dfrac{3}{2}} = 1$; $\quad y_M = \dfrac{-2 + \dfrac{3}{2}.1}{1 + \dfrac{3}{2}} = -\dfrac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad M\left(1; -\dfrac{1}{5}\right)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho bốn điểm A(0; −2); B(3; 0); $C\left(2; -\dfrac{2}{3}\right)$; $D\left(-1; -\dfrac{8}{3}\right)$.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

b) Chứng minh điểm C thuộc đoạn thẳng AB.

c) Sắp xếp các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường thẳng.

Gợi ý : a) Xét các vectơ cùng phương.

b) Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng.

c) Kết quả : D, A, C, B.

2. Cho bốn điểm A(0; 2); B(1; 4); C(–3; –3) và D(–2; 2).

a) Chứng minh rằng điểm D nằm trên đường thẳng AB còn điểm C không thuộc đường thẳng AB.

b) Gọi A', B', D' theo thứ tự là các điểm đối xứng của các điểm A, B, D qua tâm C.

Chứng minh ba điểm A', B', D' thẳng hàng.

3. Cho tam giác ABC, biết đỉnh A(1; –3), đỉnh B(3; 2). Trung điểm M của cạnh BC có tọa độ $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$ và một điểm G(2; 1).

a) Chứng minh ba điểm A, G, M thẳng hàng.

b) Tính tọa độ đỉnh C.

c) Tính tọa độ trung điểm N của cạnh AB và chứng minh ba điểm C, G, N thẳng hàng.

Gợi ý : a) Chứng minh các vectơ cùng phương.

b) C(2; 7).

4. Cho ba điểm A(1; 2); B(3; 1); H(2; –2). Gọi G là trọng tâm của tam giác OAB.

Chứng minh ba điểm H, A, G thẳng hàng.

Gợi ý : Tính tọa độ G; so sánh hai vectơ $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AG}$.

5. Cho hai điểm A(–2; –3); B(0; 1). Tìm điểm P nằm trên đường thẳng AB mà có tung độ và hoành độ bằng nhau.

Gợi ý : Gọi hoành độ của P là x thì tọa độ của P(x; x).

$$\overrightarrow{AP} = (x + 2; x + 3);$$

$$\overrightarrow{BP} = (x; x - 1).$$

$P \in AB \Rightarrow$ A, B, P thẳng hàng

$\Rightarrow \overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{BP}$ cùng phương

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x} = \frac{x+3}{x-1} \Rightarrow x = -1$$

$\Rightarrow$ P(–1; –1).

6.. Trong mặt phẳng tọa độ cho năm điểm :

$$A(-5;\,6);\quad B(0;\,-3);\quad C\left(\frac{7}{2};\,-1\right);\quad D(2;\,3);\quad E\left(-\frac{5}{2};\,-3\right).$$

a) Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{ME}$.

b) Tìm tọa độ điểm F để tứ giác ABCF là hình bình hành.

c) Xác định tọa độ điểm I, giao điểm của trục tung với đường thẳng CE ?

d) Xác định tọa độ các điểm P, Q thỏa mãn các hệ thức vectơ :

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 3\overrightarrow{CE};$$

$$4\overrightarrow{QA} + 3\overrightarrow{QD} = \vec{0}.$$

Gợi ý : a) $M\left(-\frac{5}{4};\,-3\right)$.

b) Ta có $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB}$; $F\left(\frac{17}{2};\,-9\right)$.

c) Xuất phát từ tọa độ I(0; y) và hai vectơ cùng phương $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{CE}$. Ta có $I\left(0;\,\frac{1}{6}\right)$.

d) $P\left(3;\,\frac{5}{2}\right)$; $Q\left(-2;\,\frac{31}{7}\right)$.

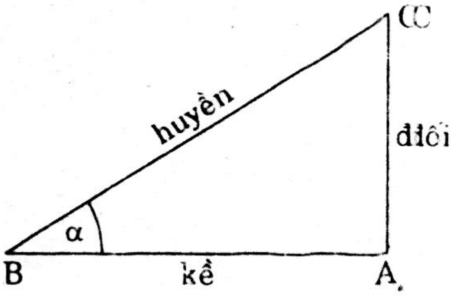
Chương II

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì (từ 0^0 đến 180^0)

1. Nhắc lại các kiến thức về tỉ số lượng giác của góc nhọn

a) Các tỉ số lượng giác



$\sin\alpha = \dfrac{\text{đối}}{\text{huyền}}$; $\cos\alpha = \dfrac{\text{kề}}{\text{huyền}}$;

$\tan\alpha = \dfrac{\text{đối}}{\text{kề}}$; $\cot\alpha = \dfrac{\text{kề}}{\text{đối}}$.

Chú ý : $0 \le \sin\alpha \le 1$; $0 \le \cos\alpha \le 1$.

b) Liên hệ giữa tỉ số lượng giác của các góc phụ nhau

$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$;

$\tan(90^0 - \alpha) = \cot\alpha$; $\cot(90^0 - \alpha) = \tan\alpha$.

c) Các hệ thức cơ bản

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$\tan\alpha.\cot\alpha = 1$;

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha \ne 90^0)$; $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(0 < \alpha < 180^0)$.

2. Giá trị lượng giác của một góc bất kì

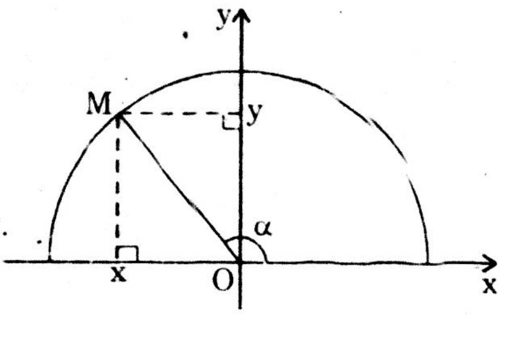
a) Định nghĩa

Với một góc α $(0^0 \le \alpha \le 180^0)$, *ta xác định một điểm* **M** *trên nửa đường tròn đơn vị sao cho* $\widehat{MOx} = \alpha$.

Khi đó, với $M(x; y)$:

$\sin\alpha = y$; $\cos\alpha = x$;

$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$ $(x \ne 0)$; $\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$ $(y \ne 0)$.



Từ các định nghĩa này, ta suy ra :

$$|\sin\alpha| \le 1; \qquad |\cos\alpha| \le 1; \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

b) Dấu của các giá trị lượng giác

<table>
<tr><th>Khoảng
GTLG</th><th colspan="2">0   90⁰   180⁰</th></tr>
<tr><td>sin</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>cos</td><td>+</td><td>–</td></tr>
<tr><td>tan</td><td>+</td><td>–</td></tr>
<tr><td>cot</td><td>+</td><td>–</td></tr>
</table>

Chú ý *: Nhìn vào bảng ta thấy, giá trị sin luôn luôn dương khi* $0 < x < 180^0$.

Với các góc nhọn thì cos, tan, cot nhận giá trị dương.

Với các góc tù thì cos, tan, cot nhận giá trị âm.

c) Liên hệ giữa giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

Hai góc bù nhau α *và* $\beta = 180^0 - \alpha$ *có :*

$\sin\alpha = \sin\beta; \qquad \cos\alpha = -\cos\beta;$

$\tan\alpha = -\tan\beta; \qquad \cot\alpha = -\cot\beta.$

Hai góc bù nhau thì có ***sin bằng nhau****; còn cos, tan, cot thì* ***đối nhau.***

d) Bảng giá trị lượng giác của một số góc hay dùng

Góc GTLG	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	KXĐ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	KXĐ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	KXĐ

Chú ý :

1. *Các công thức cơ bản về các tỉ số lượng giác của góc nhọn vẫn đúng đối với trường hợp góc α bất kì. Do đó trong khi làm toán, ta có thể sử dụng các công thức này.*

2. *Các kiến thức lượng giác trong mục này chỉ nhằm phục vụ cho việc học về tích vô hướng của 2 vectơ và ứng dụng của nó, vì vậy người học cần :*

   - *Nắm vững các định nghĩa.*
   - *Nhớ các giá trị lượng giác của các góc đặc biệt để khỏi mất thì giờ tra cứu.*
   - *Biết sử dụng thành thạo bảng số hoặc máy tính bỏ túi để tìm các giá trị lượng giác của một góc hoặc biết tìm góc khi biết giá trị lượng giác của nó. Trong công việc này, việc xác định dấu của các giá trị lượng giác có một ý nghĩa quan trọng.*

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 17. a) Cho $\cos\alpha = 0,28$. Tính góc α; $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

b) Cho $\sin\beta = 0,6$. Tính góc β; $\cos\beta$, $\tan\beta$, $\cot\beta$.

Hướng dẫn

a) $\cos\alpha = 0,28 \Rightarrow \alpha \approx 73^0 40'$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad\Rightarrow\quad \sin^2\alpha = 1 - (0,28)^2$$

$$\Rightarrow\quad \sin^2\alpha = 0,9216.$$

Vì $\cos\alpha = 0,28 > 0 \Rightarrow \alpha < 90^0 \Rightarrow \sin\alpha > 0$.

Vậy : $\sin\alpha = \sqrt{0,9216} = 0,96$;

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \approx 3,43;$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \approx 0,29.$$

Chú ý : Có thể tính $\sin\alpha = \sin 73^0 40'$.

b) Ta có : $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$

$$\Rightarrow\quad \cos^2\beta = 1 - (0,6)^2 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\beta = 0,64$$

$$\Rightarrow\quad \cos\beta = \pm\sqrt{0,64} \quad\Rightarrow\quad \cos\beta = \pm 0,8.$$

+ Với $\cos\beta = 0,8 \Rightarrow \beta \approx 36^0 52'$.

$$\tan\beta = \frac{0,6}{0,8} = 0,75; \qquad \cot\beta = \frac{0,8}{0,6} = 1,3333.$$

+ Với $\cos\beta = -0,8 \Rightarrow \beta \approx 180^0 - 36^0 52' \Rightarrow \beta \approx 143^0 08'$.

$$\tan\beta = \frac{0,6}{-0,8} = -0,75; \qquad \cot\beta = -1,3333.$$

Bài 18. Tính giá trị các biểu thức :

a) $A = \sin(120^0 + x).\tan(180^0 - 5x).\cot(75^0 + 2x)$ với $x = 30^0$.

b) $B = \sin^4 x - \cos^4 x$ trong các trường hợp :

+ Cho biết $\sin x = \frac{1}{3}$.

+ Cho biết $\cos x = -\frac{1}{4}$.

+ Cho biết $\tan x = a$.

Hướng dẫn

a) Thế $x = 30^0$ vào vế phải, ta được :

$$A = \sin(150^0).\tan(30^0).\cot(135^0)$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.(-1) \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

b) Trước hết ta rút gọn biểu thức :

$$B = \sin^4 x - \cos^4 x$$

$$\Rightarrow \quad B = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$\Rightarrow \quad B = \sin^2 x - \cos^2 x.$$

+ Thế $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ta được : $B = 2\sin^2 x - 1$.

Với $\sin x = \frac{1}{3}$, ta tính ra $B = -\frac{7}{9}$.

+ Thế $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, ta được : $B = 1 - 2\cos^2 x$.

Với $\cos x = -\frac{1}{4}$, ta tính ra $B = \frac{7}{8}$.

+ Từ $B = 1 - 2\cos^2 x$, thay thế $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$, ta được :

$$B = 1 - 2.\frac{1}{1 + \tan^2 x} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\tan^2 x - 1}{\tan^2 x + 1}.$$

Với $\tan x = a \;\Rightarrow\; B = \dfrac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tính giá trị các biểu thức :

a) $A = \tan 1^0.\tan 2^0 \ldots \tan 88^0.\tan 89^0$.

b) $B = \cos 20^0 + \cos 40^0 + \ldots + \cos 160^0 + \cos 180^0$.

c) $C = \cot 72^0.\cot 18^0 - \dfrac{\cos 46^0}{\sin 54^0}.(\cot 44^0 - \tan 134^0)$.

Gợi ý :

a) Viết $A = (\tan 1^0.\tan 89^0)(\tan 2^0.\tan 88^0)\ldots$

b) Viết $B = (\cos 20^0 + \cos 160^0) + (\cos 40^0 + \cos 140^0) + \ldots + \cos 180^0$.

c) Sử dụng liên hệ giá trị lượng giác các góc phụ nhau.

2. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{\sin 150^0 - \sin 15^0}{\sin 105^0 + \sin 165^0}$, biết $\tan 15^0 = 2 - \sqrt{3}$.

Gợi ý : $P = \dfrac{-3 + \sqrt{3}}{6}$.

3. Biết $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$.

a) Tính góc α.   **b)** Tính $\sin\alpha$, $\tan\alpha$?

Gợi ý : a) $\alpha \approx 131^0 50'$.   b) $\sin\alpha \approx \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

4. Biết $\sin\beta = 0{,}8$; $0 < \beta < 180^0$.

a) Tính $\cos\beta$, $\tan\beta$.   **b)** Tính góc β.

Gợi ý : a) $\cos\beta = \pm\, 0{,}6$; $\tan\beta = \pm\dfrac{4}{3}$.

b) Có hai góc β : $\beta_1 \approx 53^0 08'$

$\beta_2 \approx 124^0 52'$

5. Biết $\tan\alpha = -2$.

a) Tính góc α. **b)** Tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

Gợi ý : a) $\alpha \approx 114^0 34'$. b) $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

6. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{\cot^2 a - 1}{\cot^2 a + 1}$, biết $\cos a = \dfrac{3}{5}$.

Gợi ý : $P = -\dfrac{7}{25}$.

7. Tính giá trị biểu thức $Q = \dfrac{2(\sin 135^0 + \tan 45^0)}{1 - \cos 135^0}$.

Gợi ý : $Q = \sqrt{2}$.

8. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{\cos x + 2\sin x}{\cos x - 3\sin x}$, biết $\cot x = -\dfrac{1}{2}$.

Gợi ý : $P = -\dfrac{3}{7}$.

§2. Tích vô hướng của hai vectơ

1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$.

Từ một điểm O trong mặt phẳng, ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ thì góc $\widehat{AOB}$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$; kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$.

Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

– *Tích vô hướng của hai vectơ là **một số**, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$ và được tính theo công thức :*

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

– **Hệ quả**

a) Bình phương vô hướng của một vectơ

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

b) Điều kiện cần và đủ để hai vectơ vuông góc

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}.\vec{b} = 0$$

c) Góc giữa hai vectơ

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

3. Tính chất

a) Tính chất giao hoán

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$$

b) Tính chất kết hợp

$$(k\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(k\vec{b}) = k(\vec{a}.\vec{b})$$

c) Tính chất phân phối

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$$

$$\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c}.$$

4. Một số kết quả trực tiếp

a) Quỹ tích tổng bình phương

Cho đoạn thẳng AB có độ dài 2a và một số thực k. Quỹ tích các điểm M trong mặt phẳng có tổng bình phương các khoảng cách đến hai điểm A, B bằng k^2 :

$$MA^2 + MB^2 = k^2$$

là :

– *Nếu $k^2 > 2a^2$ thì quỹ tích các điểm M là đường tròn tâm là trung điểm I của AB và có bán kính $R = \sqrt{\dfrac{k^2 - 2a^2}{2}}$.*

– *Nếu* $k^2 = 2a^2$ *thì quỹ tích trùng với điểm I.*

– *Nếu* $k^2 < 2a^2$ *thì quỹ tích là* $\varnothing$.

b) Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Cho đường tròn (O; R) và một điểm M cố định. Một cát tuyến thay đổi cắt đường tròn tại hai điểm A, B thì tích $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ *không đổi và bằng* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$.

Tích $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ *được gọi là phương tích của điểm M đối với đường tròn (O; R) và kí hiệu là* $\mathcal{P}_{M/(O)}$:

$$\mathcal{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2.$$

Dễ thấy : $\mathcal{P}_{M/(O)} > 0 \Leftrightarrow$ *Điểm M nằm ngoài đường tròn.*

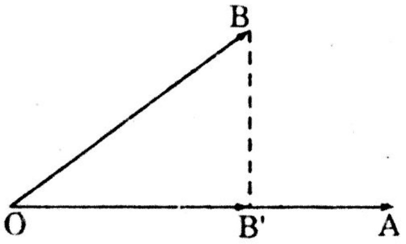
$\mathcal{P}_{M/(O)} = 0 \Leftrightarrow M \in (O; R)$.

$\mathcal{P}_{M/(O)} < 0 \Leftrightarrow$ *Điểm M nằm tron đường tròn.*

c) Tích vô hướng và hình chiếu

Cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. *Gọi B' là hình chiếu của điểm B trên đường thẳng OA. Ta có :*

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}.$$



5. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Cho hai vectơ $\vec{a}(x; y)$, $\vec{b}(x'; y')$.

a) Tọa độ của tích vô hướng

$$\vec{a}.\vec{b} = x.x' + y.y'$$

b) Độ dài của vectơ

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

c) Góc giữa hai vectơ

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (\vec{a} \neq \vec{0};\ \vec{b} \neq \vec{0})$$

d) Điều kiện vuông góc

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

e) Khoảng cách giữa hai điểm

$$A(x_A, y_A);\ B(x_B; y_B)$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 19. Cho tam giác ABC có AB = 5; BC = 7; CA = 8.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, suy ra giá trị góc A ?

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

c) D là điểm thuộc đoạn thẳng CA và CD = $\frac{1}{3}$CA. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn

a) Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 20.$$

Theo hệ quả của tích vô hướng của 2 vectơ, ta có :

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^0.$$

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}^2 = CB^2 - 2.\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} + CA^2$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2}$$

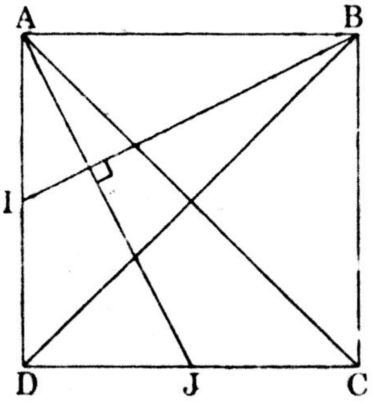
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 44.$$

c) Vì D nằm giữa hai điểm C, A và $CD = \frac{1}{3}CA$ ta suy ra $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} = \frac{44}{3}.$$

Bài 20. Cho hình vuông ABCD. Gọi I, J theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh AD, DC. Chứng minh $BI \perp AJ$.

Hướng dẫn



I là trung điểm của AD nên :

$$2\,\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}.$$

J là trung điểm của DC nên :

$$2\,\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}.$$

Xét tích vô hướng $2\,\overrightarrow{BI}.2\,\overrightarrow{AJ}$ ta có :

$$2\,\overrightarrow{BI}.2\,\overrightarrow{AJ} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}).$$

Theo các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ, ta có :

$$4\,\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}.$$

Vì : $\quad BA \perp AD \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} = 0.$

$\quad BD \perp AC \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = 0.$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos 45^0 = -AB^2.$$

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} = |\overrightarrow{DB}|.|\overrightarrow{DA}|.\cos 45^0 = DA^2.$$

Như vậy : $4\,\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AJ} = -AB^2 + DA^2$.

Mà AB = DA nên :

$$4\,\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AJ} = 0 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI} = 0 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AJ} \perp \overrightarrow{BI}.$$

Chú ý :

1. Ta có thể giải bài toán như sau :

Chọn hệ tọa độ $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$ thì trong hệ này, ta có :

$$D(0; 0),\ A(0; 1),\ C(1; 0),\ B(1; 1),\ I\left(0; \frac{1}{2}\right),\ J\left(\frac{1}{2}; 0\right)$$

và $\overrightarrow{AJ} = \left(\frac{1}{2}; -1\right)$, $\overrightarrow{BI} = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}.(-1) + (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AJ} \perp \overrightarrow{BI}$

2. Có thể xuất phát từ $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AJ} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ})$$

$$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{DJ}.$$

Mà $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} = 0$; $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DJ} = 0$ và $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{DJ}$

suy ra $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AJ} = 0 \Rightarrow$ suy ra đpcm.

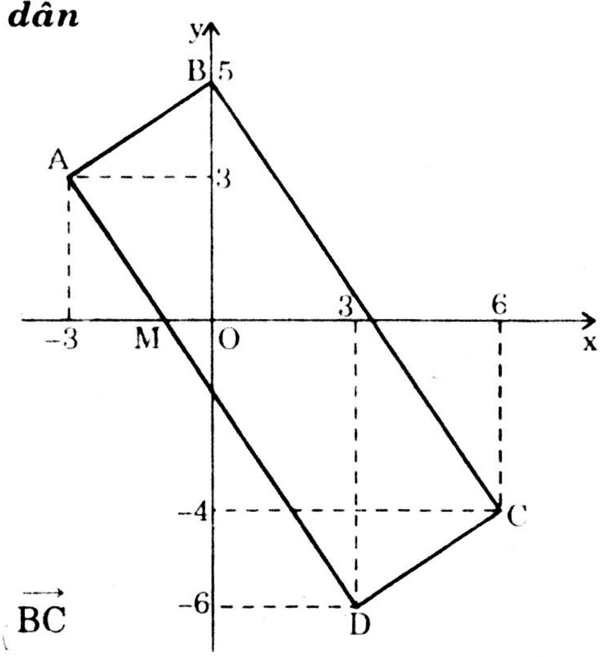
Bài 21. Cho ba điểm A(−3; 3), B(0; 5), C(6; −4).

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ đỉnh D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng AD với trục hoành.

c) Chứng minh tam giác ABC vuông, suy ra hình dạng của tứ giác ABCD.

Hướng dẫn



a) Ta xét các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (0 + 3;\ 5 - 3)$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = (3;\ 2);$$

$$\overrightarrow{BC} = (6 - 0;\ 4 - 5)$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} = (6;\ -9).$$

Vì $\dfrac{3}{6} \neq \dfrac{2}{-9}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương.

Suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng và chúng là ba đỉnh của một tam giác ABC.

b) Gọi tọa độ của D là (x; y).

Để tứ giác ABCD là hình bình hành ta phải có : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

Với $\overrightarrow{DC} = (6 - x;\ 4 - y)$ và $\overrightarrow{AB} = (3;\ 2)$, ta có hệ :

$$\begin{cases} 6 - x = 3 \\ -4 - y = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D(3;\ -6).$$

Điểm M nằm trên trục hoành nên có tọa độ M(x; 0).

Ta có : $\overrightarrow{AM} = (x + 3;\ 3)$;

$$\overrightarrow{AD} = (3 + 3;\ 3 + 6) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AD} = (6;\ 9).$$

Điểm M nằm trên AD nên hai vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AD}$ phải cùng phương, cho ta :

$$\frac{x + 3}{6} = \frac{3}{9} \quad \Rightarrow \quad x = -1.$$

Ta có : M (−1; 0).

c) Ta chứng minh tam giác ABC vuông theo hai cách :

Cách 1 : Sử dụng tích vô hướng :

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (3; 2)$;

$\overrightarrow{BC} = (6; -9)$;

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 3.6 + 2.(-9) = 18 - 18 = 0$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC$ vuông tại đỉnh B.

Cách 2 : Áp dụng định lí Pitago đảo, ta có :

$AB^2 = (0 + 3)^2 + (5 - 3)^2 = 13;$

$BC^2 = (6 - 0)^2 + (-4 - 5)^2 = 117;$

$AC^2 = (6 + 3)^2 + (-4 - 3)^2 = 130.$

Từ các kết quả trên, ta suy ra :

$AC^2 = BC^2 + BA^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC$ vuông tại B.

Hình bình hành ABCD có 1 góc vuông. Vậy nó là một hình chữ nhật.

Chú ý : Đối với các bài toán hình học thì việc vẽ hình là rất quan trọng. Hình vẽ giúp chúng ta định hướng được suy nghĩ, sắp xếp công việc cần làm, các yếu tố cần tính toán và biết bắt đầu lời giải từ khâu nào. Chẳng hạn trong bài toán này, vẽ hình xong, ta thấy tam giác ABC chỉ có thể vuông góc tại đỉnh B, do vậy ta tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ mà không cần thử các tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ hoặc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$ nữa, đồng thời hình vẽ cũng giúp chúng ta kiểm tra và chỉnh lí các lời giải như trường hợp tìm tọa độ điểm D hoặc điểm M.

Bài 22. Cho tam giác ABC có ba đỉnh A(2; 6), B(−3; −4), C(5; 0).

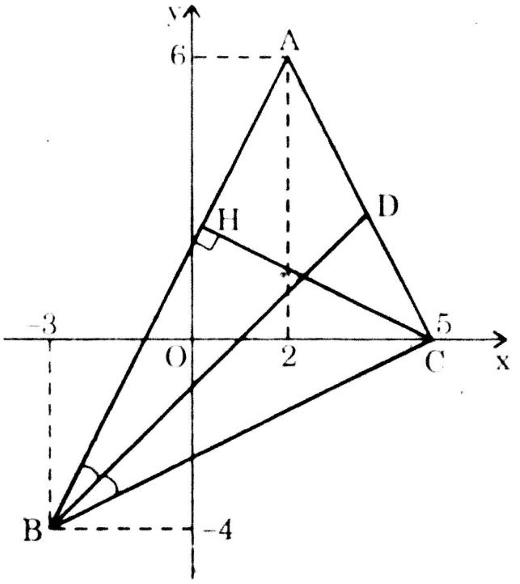
a) Chứng minh tam giác ABC vuông.

b) Tính diện tích của tam giác, suy ra chiều cao CH.

c) Kẻ phân giác trong BD của góc B. Tìm tọa độ điểm D.

d) Tìm tọa độ chân H của đường cao CH.

Giải



a) Ta có : $CA^2 = (-3)^2 + 6^2 = 45;$

$CB^2 = (-8)^2 + (-4)^2 = 80;$

$AB^2 = (-5)^2 + (-10)^2 = 125.$

Dễ thấy $AB^2 = CA^2 + CB^2$

$\Rightarrow$ ΔABC vuông tại đỉnh C.

b) Từ các kết quả trên, ta được :

$CA = 3\sqrt{5}$; $CB = 4\sqrt{5}$; $AB = 5\sqrt{5}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{2}.3\sqrt{5}.4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad S_{ABC} = 30(\text{đvdt}).$$

Ta cũng có :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CH \quad \Rightarrow \quad CH = \frac{2S_{ABC}}{AB} \quad \Rightarrow \quad CH = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

c) Theo định lí về tính chất của đường phân giác trong của tam giác (lớp 8) ta có :

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{DA}{DC} = \frac{5}{4}.$$

Áp dụng công thức tính tọa độ điểm chia đoạn thẳng AC theo tỉ số $k = -\frac{5}{4}$, ta được :

$$x_D = \frac{2 + \frac{5}{4}.5}{1 + \frac{5}{4}} = \frac{11}{3}; \qquad y_D = \frac{6 + \frac{5}{4}.0}{1 + \frac{5}{4}} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \quad D = \left(\frac{11}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

d) Gọi tọa độ của H là (x; y), ta có :

$$\overrightarrow{CH} = (x - 5; y), \quad \overrightarrow{AB} = (-5; -10).$$

$$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad -5(x - 5) + (-10).y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 2y - 5 = 0 \qquad (1)$$

Điểm H nằm trên AB hay ba điểm A, B, H thẳng hàng nên hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{BH}$ phải cùng phương.

$$\overrightarrow{AH} = (x - 2; y - 6);$$

$$\overrightarrow{BH} = (x + 3; y + 4).$$

$\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{BH}$ cùng phương, cho ta :

$$\frac{x-2}{x+3} = \frac{y-6}{y+4} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y + 2 = 0 \qquad (2)$$

Điểm H có tọa độ thỏa mãn cả hai phương trình (1) và (2) nên tọa độ của H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H\left(\frac{1}{5}; \frac{13}{5}\right).$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho tam giác đều ABC, cạnh a.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}$.

b) Tính tổng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$.

2. Cho tam giác ABC có AB = 6; AC = 8; BC = 11.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ suy ra độ lớn của góc A.

b) Trên AB lấy điểm M sao cho AM = 2 và trên AC lấy điểm N sao cho AN = 4. Tính tích $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$.

Gợi ý : a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{21}{2}.$$

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{-\frac{21}{2}}{6.8} \approx -0{,}2188$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{A} \approx 102^0 38'.$$

b) Ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{7}{4}.$$

Chú ý: có thể tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$ theo định nghĩa.

3. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh CD lấy một điểm E và trên tia BC lấy một điểm F sao cho CE = CF. Chứng minh BE ⊥ DF.

Gợi ý: Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DF}$

với $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$.

4. Cho hình chữ nhật ABCD, kẻ BH ⊥ AC. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AH, DC. Chứng minh BM ⊥ MN.

Gợi ý: Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MN}$

với $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH})$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$.

5. Cho ba điểm A(3; 4), B(1; −2), C(−2; −1).

a) Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Chứng minh tam giác ABC vuông (theo 2 cách).

c) Tìm tọa độ điểm I, trung điểm của cạnh AC và tọa độ điểm D, đối xứng với điểm B qua điểm I.

d) Cho biết hình dạng của tứ giác ABCD.

Gợi ý: a) Chứng minh các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

b) Chứng minh $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0$ hoặc sử dụng định lí đảo Pitago:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

c) $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, D(0; 5).

d) ABCD là hình chữ nhật.

6. Cho ba điểm A(2; −2), B(−4; −2), C(x; 1).

a) Với giá trị nào của x thì A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Với giá trị nào của x thì tam giác ABC vuông tại :

- Đỉnh A ?
- Đỉnh C ?

7. Cho tam giác ABC với A(2; 3), B(9; 4), C(5; y).

a) Xác định giá trị y để tam giác ABC là tam giác vuông.

b) Tìm điểm P thuộc đường thẳng AB và có tung độ bằng –2.

Gợi ý : a) $y = -18 \Rightarrow$ ΔABC vuông tại A;

$y = 32 \Rightarrow$ ΔABC vuông tại B;

$y = 0$ hoặc $y = 7 \Rightarrow$ ΔABC vuông tại C.

b) Xét các vectơ cùng phương $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ với P(x; –2).

8. Cho tam giác đều ABC, cạnh 3a. Lấy các điểm M, N, P theo thứ tự trên các cạnh BC, CA, AB sao cho BM = a; CN = 2a; AP = x.

a) Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AB})$.

c) Tính x để $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{PN}$.

Gợi ý : a) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{PN} = -\frac{x}{3a}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

c) $x = \frac{4a}{5}$.

9. Cho ba điểm A(–2; 1), B(3; 6), C(4; –1).

a) Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành, tìm tọa độ tâm I của nó.

b) Chứng minh AC ⊥ BD, suy ra hình dạng của tứ giác ABCD ?

c) Tìm tọa độ các giao điểm E, F của BD với các trục tọa độ.

Gợi ý : b) ABCD là hình thoi.

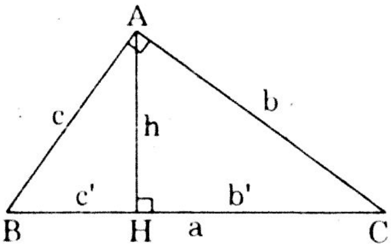
c) Tọa độ của E(x; 0), của F(0; y).

§3. Hệ thức lượng trong tam giác

1. Nhắc lại các hệ thức và hệ thức lượng giác trong tam giác vuông

a) Các hệ thức

Tam giác ABC vuông tại đỉnh A :



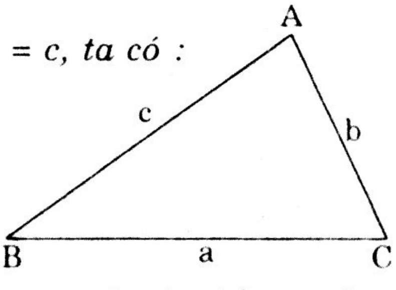
1. $b^2 = ab'; c^2 = ac'$
2. $\widehat{A} = 90^0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$
3. $ah = bc$
4. $h^2 = b'c'$
5. $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

b) Các hệ thức lượng giác

1. $b = a\sin B = a\cos C$
2. $c = a\sin C = a\cos B$
3. $b = c\tan B = c\cot C$
4. $c = b\tan C = b\cot B$

2. Hệ thức lượng trong tam giác

a) Định lí cosin



Trong tam giác ABC với BC = a, CA = b, AB = c, ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

"Trong một tam giác, bình phương của một cạnh thì bằng tổng bình phương của hai cạnh kia, trừ đi 2 lần tích của hai cạnh ấy nhân với cosin của góc đối diện."

Hệ quả

1. Ta dễ dàng chứng minh :

$\widehat{A} < 90^0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$

$\widehat{A} = 90^0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$ *(định lí Pitago)*

$\widehat{A} > 90^0 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

2. *Từ định lí cosin, ta suy ra công thức tính các góc của tam giác.*

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

b) Định lí sin

Với mọi tam giác ABC, ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

"Trong một tam giác thì các cạnh tỉ lệ với sin của góc đối."

c) Công thức độ dài trung tuyến

Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài các trung tuyến ứng với cạnh a, b, c ta có :

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

d) Công thức tính diện tích tam giác

1. $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$.

2. $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$

3. $S = \frac{abc}{4R}$

4. $S = pr$ *với* $2p = a + b + c$

5. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

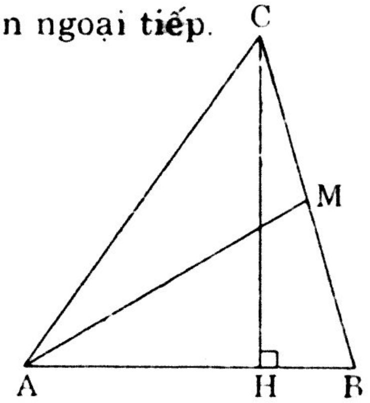
BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 23. Cho tam giác ABC biết $a = \sqrt{13}$; $b = 4$; $c = 3$.

a) Tính các góc của tam giác.

b) Tính chiều cao CH và trung tuyến AM của tam giác.

c) Tính diện tích S_{ABC}; bán kính R của đường tròn ngoại tiếp.



Hướng dẫn

a) Ta có : $\cos\widehat{A} = \dfrac{4^2 + 3^2 - (\sqrt{13})^2}{2.3.4} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \widehat{A} = 60^0$.

Tương tự ta tính được : $\widehat{B} \approx 64^0$; $\quad \widehat{C} \approx 56^0$.

b) Ta có : $CH = AC.\sin\widehat{A} \quad \Rightarrow \quad CH = 4.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \quad \Rightarrow \quad AM = 3{,}5.$$

c) $\quad S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.CH = \dfrac{1}{2}.3.2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

$$R = \frac{abc}{4S} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{3.4.\sqrt{13}}{4.3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{39}.$$

Bài 24. Cho tam giác ABC biết $a = 3 + \sqrt{3}$; $c = 3\sqrt{2}$ và $\widehat{B} = 45^0$.

a) Tính cạnh b và các góc A, C.

b) Tính diện tích tam giác.

c) Từ các kết quả trên, suy ra giá trị lượng giác của các góc 75^0, 15^0, 105^0 ?

Hướng dẫn

a) Áp dụng định lí cosin, ta có :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\widehat{B}$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = (3 + \sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2(3 + \sqrt{3}).3\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 12$$

$$\Rightarrow \quad b = 2\sqrt{3}.$$

Áp dụng định lí sin ta có :

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 60^0.$$

Từ đây ta tính ra $\hat{A} = 75^0$.

b) Áp dụng công thức :

$$S = \frac{1}{2}ac\sin B \Rightarrow S = \frac{1}{2}(3+\sqrt{3}).3\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{3}{2}(3+\sqrt{3}) \text{ (đvdt)}.$$

c) Vì $\hat{A} = 75^0$ nên ta tính cosA.

Theo định lí cosin, ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \cos 75^0 = \frac{(2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2 - (3+\sqrt{3})^2}{2.2\sqrt{3}.3\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos 75^0 = \frac{18 - 6\sqrt{3}}{12\sqrt{6}} \Rightarrow \cos 75^0 = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}.$$

Thực hiện trục căn thức ở mẫu, ta được :

$$\cos 75^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Ta tính $\sin 75^0$ từ công thức $\sin 75^0 = \sqrt{1 - \cos^2 75}$ và được :

$$\sin 75^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Từ đây ta tính được : $\tan 75^0 = 2 + \sqrt{3}$;

$$\cot 75^0 = 2 - \sqrt{3}.$$

Sử dụng liên hệ giữa các giá trị lượng giác của các góc phụ nhau và của các góc bù nhau, ta có :

	sin	cos	tan	cot
75^0	$\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
15^0	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
105^0	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-2-\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{3}$

Bài 25. Cho tam giác ABC, biết A(–6; –5), B(–1; 7), C(8; –5).

a) Tính các cạnh AB; BC; CA và các góc A, B, C của tam giác.

b) Tính diện tích S và chu vi 2p của tam giác.

c) Tính các bán kính R, r của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

d) Kẻ đường cao AH và phân giác AD. Tìm tọa độ điểm H, điểm D.

Hướng dẫn

a) Ta có : $AB^2 = (-1+6)^2 + (7+5)^2 = 169 \Rightarrow AB = 13.$

Tương tự, ta tính được : BC = 15; CA = 14.

$$\cos A = \frac{13^2+14^2-15^2}{2.13.14} = \frac{5}{13} \approx 0{,}3846$$

$$\Rightarrow \quad \hat{A} \approx 67^0 23'.$$

Tương tự ta có : $\hat{B} \approx 59^0 29'$;

$\hat{C} = 53^0 08'.$

b) Ta có : $2p = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow p = 21.$

$p - a = 6;\ p - b = 7;\ p - c = 8.$

$S = \sqrt{21.6.7.8} = 84$ (đvdt).

c) Áp dụng công thức :

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{13.14.15}{4.84} = 8{,}125.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{84}{21} = 4.$$

d) Gọi (x; y) là tọa độ của H : H(x; y).

$$\overrightarrow{AH} = (x + 6; y + 5); \quad \overrightarrow{BC} = (9; -12).$$

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 9(x + 6) - 12(y + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4y - 2 = 0 \qquad (1)$$

H ∈ BC nên ba điểm B, H, C thẳng hàng hay hai vectơ $\overrightarrow{BH}$ và $\overrightarrow{BC}$ là hai vectơ cùng phương.

$$\overrightarrow{BC} = (9; -12); \quad \overrightarrow{BH} = (x + 1; y - 7).$$

$\overrightarrow{BH}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương cho ta :

$$\frac{x+1}{9} = \frac{y-7}{-12} \Rightarrow 4x + 3y - 17 = 0 \qquad (2)$$

Tọa độ (x; y) của H phải thỏa mãn cả hai điều kiện (1), (2) nên chúng là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 4x + 3y - 17 = 0 \\ 3x - 4y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{74}{25}; \frac{43}{25}\right).$$

Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{13}{14}$. D là chân của đường phân giác trong của góc A, theo tính chất hình học của phân giác trong của một góc thì D chia BC theo tỉ số $\frac{13}{14}$. Do đó ta có :

$$x_D = \frac{-1 + \frac{13}{14}.8}{1 + \frac{13}{14}} = \frac{10}{3}, \qquad y_D = \frac{7 + \frac{13}{14}.(-5)}{1 + \frac{13}{14}} = \frac{11}{9}$$

$$\Rightarrow D\left(\frac{10}{3}; \frac{11}{9}\right).$$

Bài 26. Cho tam giác ABC. Gọi BC = a; CA = b; AB = c và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh các hệ thức :

a) $c = a\cos B + b\cos A$.

b) $2p = (a + b)\cos C + (c + a)\cos B + (b + c)\cos A$.

c) $a^2 + b^2 + c^2 = 2R(a\sin A + b\sin B + c\sin C)$.

d) $S_{ABC} = 2R^2\sin A.\sin B.\sin C$.

e) $\tan A = \dfrac{a\sin B}{c - a\cos B}$.

Hướng dẫn

a) Kẻ đường cao CH, ta có :

$$BH = a\cos B;\ AH = b\cos A \quad \Rightarrow \quad AB = a\cos B + b\cos A.$$

b) Ta có : $a = b\cos C + c\cos B$;

$b = a\cos C + c\cos A$;

$c = a\cos B + b\cos A$;

$\Rightarrow \quad 2p = a + b + c = (a + b)\cos C + (b + c)\cos A + (c + a)\cos B.$

c) Áp dụng định lí sin ta có :

$$\sin A = \frac{a}{2R} \quad \Rightarrow \quad a\sin A = \frac{a^2}{2R}.$$

Tương tự, ta có : $b\sin B = \dfrac{b^2}{2R}$;

$c\sin C = \dfrac{c^2}{2R}$;

$$\Rightarrow \quad a\sin A + b\sin B + c\sin C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2R(a\sin A + b\sin B + c\sin C).$$

d) Ta có : $S = \dfrac{1}{2}b.a\sin C$ mà $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$

$\Rightarrow \quad S = 2R^2\sin A\sin B\sin C.$

e) Ta có : $c = a\cos B + b\cos A \quad \Rightarrow \quad c - a\cos B = b\cos A$ (1)

Theo định lí sin :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \Rightarrow \quad a\sin B = b\sin A \qquad (2)$$

Chia (2) cho (1), vế với vế, ta được :

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a\sin B}{c - a\cos B} \quad \Rightarrow \quad \tan A = \frac{a\sin B}{c - a\cos B}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho tam giác ABC, biết $\widehat{A} = 120^0$; a = 13cm và b + c = 15cm.

a) Tính các cạnh b, c. **b)** Tính góc B, C ?

Gợi ý :

a) Theo định lí cosin : $13^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos 120^0$

$$\Rightarrow \quad b^2 + c^2 + bc = 169 \qquad (1)$$

Từ giả thiết b + c = 15 ⇒ $b^2 + c^2 + 2bc = 225$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra bc = 56.

b, c là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - 15X + 56 = 0$

⇒ b = 8; c = 7 hoặc b = 7; c = 8.

b) Theo định lí sin :

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{\sin B} = \frac{13}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sin B = 0{,}5329$$

$\Rightarrow \quad \widehat{B} \approx 32^0 12'$ và $\widehat{C} \approx 27^0 48'$

hoặc $\widehat{B} \approx 27^0 48'$ và $\widehat{C} \approx 32^0 12'$.

2. Cho tam giác ABC, biết b = 7; c = 5 và $\sin A = \frac{4}{5}$.

a) Tính cạnh a và các góc A, B, C.

b) Tính diện tích S ?

Gợi ý :

a) $\sin A = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 A = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 A = \frac{9}{25}$

$$\Rightarrow \quad \cos A = \pm\frac{3}{5}.$$

– Nếu $\cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow \widehat{A} \approx 53^0 52'$.

$$a^2 = 49 + 25 - 2.7.5.\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad a^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad a \approx 5{,}66$$

Áp dụng định lí sin, ta tính được : $\widehat{C} \approx 45^0$; $\widehat{B} \approx 81^0 28'$.

– Nếu $\cos A = -\frac{3}{5} \Rightarrow \hat{A} \approx 124^0 08'$.

$$a^2 = 49 + 25 + 2.7.5.\frac{3}{5} \Rightarrow a^2 = 116 \Rightarrow a \approx 10{,}77.$$

Áp dụng định lí sin ta tính ra : $\hat{C} \approx 21^0 48'$; $\hat{B} \approx 34^0 06'$.

b) S = 14 (đvdt).

3. Cho tam giác ABC, biết A(–1; 7), B(4; –3), C(–4; 1).

a) Tính các cạnh của tam giác.

b) Tính diện tích S và chu vi 2p.

Gợi ý :

a) $AB = 5\sqrt{5}$; $AC = 3\sqrt{5}$; $BC = 4\sqrt{5}$.

b) $2p = 12\sqrt{5}$; S = 30 (đvdt).

Chú ý : có thể tính S theo 2 cách :

– Chứng minh ΔABC vuông tại A ($\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ hoặc $BC^2 = AB^2 + AC^2$); lúc đó $S = \frac{1}{2}AB.AC$.

– Tính theo công thức Hêrông.

4. Cho tam giác ABC, biết BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh :

a) $b + c = 2a \Rightarrow \sin B + \sin C = 2\sin A$.

b) $bc = a^2 \Rightarrow \sin B + \sin C = \sin^2 A$.

Gợi ý : Sử dụng định lí sin.

5. Cho a, b, c là ba độ dài cho trước. Chứng minh rằng tam giác có ba cạnh là $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{b^2 + c^2}$, $\sqrt{c^2 + a^2}$ là tam giác nhọn.

6. Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn hệ thức :

$$\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A.$$

Chứng minh $\hat{A} \leq 60^0$.

Gợi ý : Từ định lí sin ta có :

$$\sin^2 A = \frac{a^2}{4R^2}; \quad \sin^2 B = \frac{b^2}{4R^2}; \quad \sin^2 C = \frac{c^2}{4R^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A \Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 = 2a^2.$$

Vì $b^2 + c^2 \geq 2bc \Rightarrow 2a^2 \geq 2bc \Rightarrow \quad a^2 > bc$ (1)

Theo định lí cosin :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \quad a^2 = 2a^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow \quad \cos A = \frac{a^2}{2bc} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\cos A \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \widehat{A} \leq 60^0$.

7. Sử dụng các định lí cosin, công thức độ dài trung tuyến, chứng minh các định lí sau :

a) Điều kiện cần và đủ để một tam giác là vuông là nó có một đường trung tuyến bằng $\frac{1}{2}$ cạnh đối diện.

b) – Trong một tam giác, bình phương của một cạnh đối diện với một góc nhọn thì bằng tổng các bình phương của hai cạnh còn lại trừ đi 2 lần tích của một trong hai cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.

– Trong một tam giác, bình phương một cạnh đối diện với một góc tù thì bằng tổng các bình phương của hai cạnh còn lại cộng với 2 lần tích của một trong hai cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.

c) Hai tam giác có hai cạnh tương ứng bằng nhau nhưng góc xen giữa hai cạnh ấy không bằng nhau thì đối diện với góc lớn hơn ta có cạnh lớn hơn và ngược lại.

d) – Trong một tứ giác, tổng bình phương của bốn cạnh thì bằng tổng bình phương của hai đường chéo cộng thêm 4 lần bình phương của đoạn thẳng nối các trung điểm của hai đường chéo.

– Các trường hợp đặc biệt :

+ Trong hình bình hành thì tổng các bình phương của bốn cạnh thì bằng tổng các bình phương của hai đường chéo.

+ Trong một hình thang thì tổng bình phương của hai đường chéo thì bằng tổng các bình phương của hai cạnh bên cộng với 2 lần tích của hai cạnh ấy.

8. Cho tam giác ABC cân đỉnh C, biết AB = 2cm; AC = 4cm.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$.

b) Tính các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ của tam giác ABC.

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác. Tính $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$, suy ra ΔAGB là tam giác đều.

Gợi ý : a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AH} = 2$ (công thức chiếu)

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -2.$

$\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}) = 0.$

b) $\cos\hat{A} = \cos\hat{B} = \frac{1}{4}$; $\hat{C} \approx 28^0 58'$; $\hat{A} = \hat{B} \approx 75^0 31'$.

c) Gọi H là trung điểm của AB.

$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = GH^2 - HA^2 \Rightarrow \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}.$

$$\cos\widehat{AGB} = \frac{\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}}{|\overrightarrow{GA}||\overrightarrow{GB}|} = \frac{1}{4} \Rightarrow \widehat{AGB} = \hat{A} = \hat{B}.$$

Chương III

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. Phương trình đường thẳng

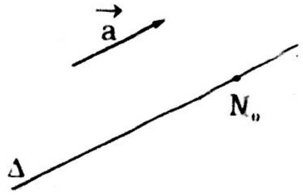
1. Các dạng phương trình đường thẳng

a) Phương trình tham số của đường thẳng

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2)$ *và đi qua điểm* $M_0(x_0; y_0)$ *có phương trình tham số :*

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \end{cases}$$

trong đó t là một số thực.



b) Phương trình chính tắc của đường thẳng

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2)$ *và đi qua điểm* $M_0(x_0; y_0)$ *có phương trình tham số :*

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

c) Phương trình tổng quát của đường thẳng

Phương trình bậc nhất hai ẩn $Ax + By + C = 0$ *với A, B không đồng thời bằng 0* $(A^2 + B^2 \neq 0)$ *được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.*

Chú ý :

1. Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $Ax + By + C = 0$ *thì có :*

- *Vectơ pháp tuyến* $\vec{n} = (A; B)$
- *Vectơ chỉ phương* $\vec{a} = (-B; A)$

2. Khi giải toán ta thường dùng kết quả sau : "Đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ *và có vectơ pháp tuyến* $\vec{n} = (A; B)$ *có phương trình tổng quát dạng :* $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$*".*

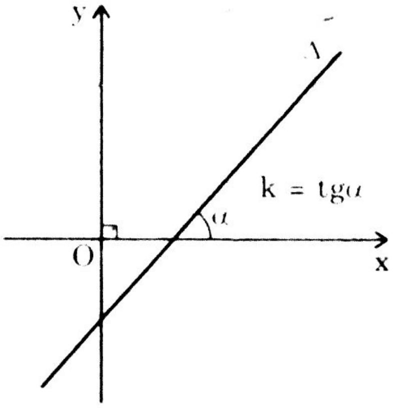
Ngoài ba dạng phương trình chủ yếu trên đây, trong thực hành giải toán ta thường sử dụng các dạng sau :

d) Phương trình đường thẳng theo hệ số góc

Cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2)$ *và đi qua điểm* $M_0(x_0; y_0)$*.*

Khi $a_1 \neq 0$ thì tỉ số $\frac{a_2}{a_1}$ được gọi là ***hệ số góc*** *của đường thẳng Δ, kí hiệu là k:*

$$k = \frac{a_2}{a_1}$$



Dễ thấy k = tgα, trong đó α là góc giữa Δ với chiều dương của trục hoành Ox.

Phương trình đường thẳng Δ có hệ số góc k và đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ là :

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Phương trình này có dạng rút gọn quen thuộc y = kx + b, trong đó k là hệ số góc, còn b là ***tung độ gốc****.*

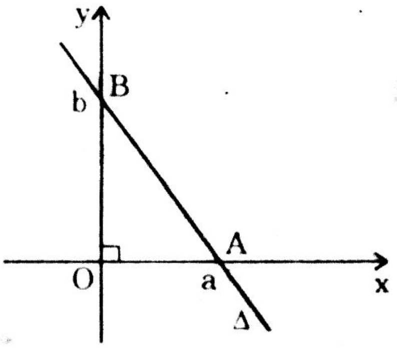
e) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt

Cho hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ thì phương trình đường thẳng AB là :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Ta dễ dàng chứng minh được điều này dựa vào cách chứng minh ba điểm thẳng hàng.

f) Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn



Đường thẳng Δ đi qua điểm A(a; 0) và điểm B(0; b) có phương trình :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Muốn viết được phương trình của một đường thẳng Δ ta cần biết được hai yếu tố :

- *Một vectơ chỉ phương của Δ và một điểm $M_0 \in \Delta$ hoặc*
- *Một vectơ pháp tuyến của Δ và một điểm $M_0 \in \Delta$ hoặc*
- *Hai điểm A, B thuộc Δ.*

Giữa các dạng phương trình của đường thẳng có thể chuyển đổi cho nhau một cách dễ dàng, nghĩa là từ một dạng này ta có thể chuyển sang dạng khác và việc này được vận dụng một cách linh hoạt *trong từng bài toán cụ thể giúp cho việc giải toán được nhanh gọn và đơn giản. Cũng cần chú ý là tùy theo việc chọn điểm $M_0 \in \Delta$ và việc chọn một vectơ chỉ phương mà các dạng phương trình tham số hoặc phương trình chính tắc của Δ có thể có hình thức khác nhau.*

2. Các vị trí tương đối

a) Vị trí tương đối của điểm đối với đường thẳng

– *Cho điểm $M_0(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$.*

Nếu tọa độ của M_0 thỏa mãn phương trình của Δ thì M_0 nằm trên đường thẳng Δ và ngược lại :

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_0(x_0; y_0) \in \Delta$$

– *Cho hai điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$ và đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$ thì :*

+ *Nếu $(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) > 0$ thì hai điểm M, N cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng Δ.*

+ *Nếu $(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) < 0$ thì hai điểm M, N nằm trong hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là Δ.*

Cần chú ý là đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng mà trong mỗi nửa ấy thì biểu thức $f(x, y) = Ax + By + C$ giữ một dấu không đổi.

b) Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

+ *Nếu* $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2} \Rightarrow$ *Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.*

Điều kiện này cũng được cho dưới dạng :

$$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0 \text{ hay } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ *Δ_1 cắt Δ_2.*

+ *Nếu* $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2} \Rightarrow \Delta_1 \,//\, \Delta_2$.

+ *Nếu* $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \Rightarrow$ *Δ_1 trùng với Δ_2.*

c) Chùm đường thẳng

*Tập hợp các đường thẳng đồng quy tại một điểm P được gọi là một **chùm đường thẳng**; điểm P được gọi là **đỉnh** của chùm.*

Một chùm được xác định bởi hai đường thẳng thuộc chùm.

Hai đường thẳng $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

*giao nhau tại điểm P xác định một chùm đường thẳng đỉnh P và hai **đường thẳng cơ sở*** Δ_1, Δ_2.

Khi đó, mọi đường thẳng thuộc chùm có phương trình dạng :

$$p(A_1x + B_1y + C_1) + q(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad \text{với } p^2 + q^2 \neq 0.$$

Phương trình này còn được viết dưới dạng :

$$(pA_1 + qA_2)x + (pB_1 + qB_2)y + pC_1 + qC_2 = 0.$$

Các kiến thức về chùm đường thẳng được sử dụng vào các bài tập có yêu cầu viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng cho trước và giúp ta giải bài tập mà không cần tìm giao điểm của hai đường thẳng ấy.

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 27. Cho đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$ và có hệ số góc $k = -\frac{3}{2}$.

a) Viết phương trình Δ_1 dưới dạng tổng quát và chỉ rõ một vectơ pháp tuyến của nó.

b) Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của Δ.

c) Xác định vị trí tương đối của Δ_1 với các đường thẳng có phương trình :

$$\Delta_2 : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$$

Δ_3 : đi qua hai điểm $M\left(-2; \frac{19}{4}\right)$; $N\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Giải

a) Ta có phương trình Δ_1 theo hệ số góc là : $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

Từ phương trình này, ta suy ra phương trình tổng quát của Δ :

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2y = -3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2y - 1 = 0$$

Một vectơ pháp tuyến của Δ_1 là $\vec{n} = (3; 2)$.

b) Từ vectơ pháp tuyến của Δ_1 : $\vec{n} = (3; 2)$, ta suy ra một vectơ chỉ phương của Δ_1 là $\vec{a} = (-2; 3)$.

Để viết được phương trình tham số, ta cần tìm thêm một điểm $M_0 \in \Delta_1$. Muốn vậy, trong phương trình của Δ_1 : $3x + 2y - 1 = 0$, ta cho $x_0 = 1$ chẳng hạn, ta tính được : $3.1 + 2y_0 - 1 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$, ta có $M_0(1; -1) \in \Delta_1$

và được phương trình tham số của Δ_1 là $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$

và được phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{3}$.

c) Để xác định vị trí tương đối giữa Δ_1, Δ_2 ta nhận thấy phương trình Δ_2 được cho dưới dạng tham số. Trong trường hợp này, ta có hai cách giải quyết :

Cách 1 :

Đưa phương trình Δ_2 về dạng tổng quát bằng cách khử t giữa x, y bằng phép cộng đại số hoặc phép thế để có một liên hệ giữa x, y độc lập đối với t :

$$\Delta_2 : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -15 + 10t & (1) \\ 2y = 2 - 10t & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) vế với vế : $5x + 2y = -13 \Rightarrow 5x + 2y + 13 = 0$.

Đây chính là phương trình tổng quát của Δ_2.

Bây giờ ta xét sự có nghiệm của hệ : $\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ 5x + 2y + 13 = 0 \end{cases}$

Định thức $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4 \neq 0$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $x = -7$; $y = 11$.

Từ đó suy ra Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại điểm D(−7; 11).

Cách 2 :

Đem thế x, y từ phương trình tham số của Δ_2 vào phương trình của Δ_1, ta được một phương trình bậc nhất đối với tham số t :

$$3(-3 + 2t) + 2(1 - 5t) - 1 = 0 \Leftrightarrow -4t - 8 = 0.$$

Phương trình này cho ta một nghiệm t = −2. Vậy Δ_1, Δ_2 là hai đường thẳng cắt nhau và giá trị t = −2 là giá trị tham số ứng với giao điểm của hai đường thẳng.

$$\text{Với } t = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2(-2) = -7 \\ y = 1 - 5(-2) = 11 \end{cases}$$

ta tìm được tọa độ giao điểm P(−7; 11).

Cần chú ý là nếu phương trình bậc nhất theo t này vô nghiệm thì hai đường thẳng song song với nhau, còn trong trường hợp phương trình này vô số nghiệm thì ta được hai đường thẳng trùng nhau.

Đối với đường thẳng Δ_3, ta viết được phương trình tổng quát của $\Delta_3 : 6x + 4y - 7 = 0$

vì $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} \neq \frac{-7}{-1}$ nên $\Delta_1 // \Delta_3$.

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm A(−6; −3); B(−4; 3); C(9; 2).

a) Viết phương trình các đường thẳng AB, BC, CA.

b) Viết phương trình đường thẳng chứa trung tuyến AM của tam giác ABC và tính tọa độ trọng tâm G của tam giác.

c) Viết phương trình đường thẳng chứa phân giác AD của góc A và tính tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp trong tam giác.

Giải

a) Ta có : A(−6; −3); B(−4; 3)

$$\Rightarrow \quad AB : \frac{x+6}{-4+6} = \frac{y+3}{3+3} \Leftrightarrow AB : 3x - y + 15 = 0$$

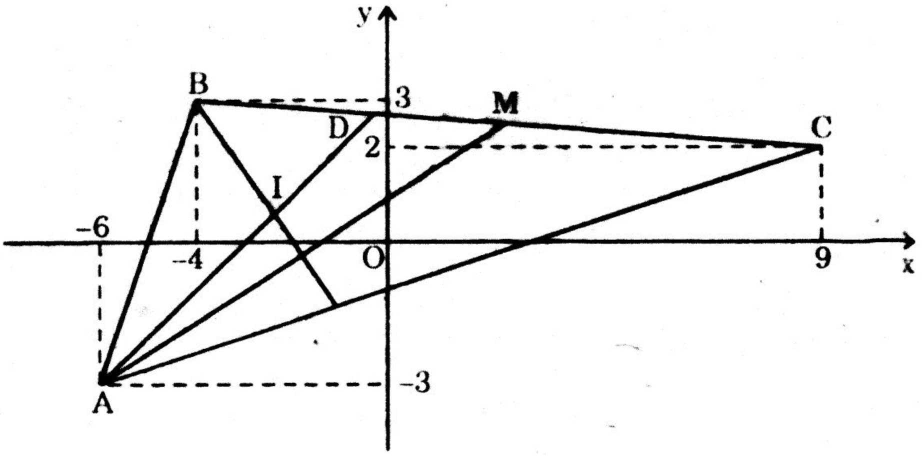
Tương tự, ta có : $BC : x + 13y - 35 = 0$

$CA : x - 3y - 3 = 0$

b) Trung điểm M của BC có tọa độ : $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{5}{2}$.

Đường thẳng AM có phương trình :

$$\text{AM} : \frac{x+6}{\frac{5}{2}+6} = \frac{y+3}{\frac{5}{2}+3} \quad \Rightarrow \quad \text{AM} : 11x - 17y + 15 = 0$$



Để tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác, ta có ba cách :

Cách 1 :

Sử dụng công thức trọng tâm để có :

$$x_G = \frac{-6-4+9}{3} = -\frac{1}{3}; \qquad y_G = \frac{-3+3+2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad G\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Cách 2 :

Viết phương trình trung tuyến CP : $x - 7y + 5 = 0$

Tọa độ của G là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 11x - 17y + 15 = 0 \\ x - 7y + 5 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad G\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Cách 3 :

G là điểm chia trong đoạn thẳng AM theo tỉ số $\frac{GA}{GM} = 2$ nên

$$x_G = \frac{-6 + 2.\frac{5}{2}}{1+2} = -\frac{1}{3}; \qquad y_G = \frac{-3 + 2.\frac{5}{2}}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad G\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Rõ ràng cách vận dụng công thức tính trọng tâm là đơn giản hơn cả !

c) Trước hết ta tìm điểm D, giao điểm của phân giác trong của góc A với cạnh BC.

Ta tính được : $AB = 2\sqrt{10}$; $AC = 5\sqrt{10}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{5}$.

D là điểm chia đoạn thẳng BC theo tỉ số $\dfrac{2}{5}$. Do đó :

$$x_D = \frac{-4 + \frac{2}{5}.9}{1 + \frac{2}{5}} = -\frac{2}{7}; \qquad y_D = \frac{3 + \frac{2}{5}.2}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{19}{7}$$

Đường thẳng AD có phương trình :

$$\frac{x + 6}{-\frac{2}{7} + 6} = \frac{y + 3}{\frac{19}{7} + 3} \quad \Rightarrow \quad x - y + 3 = 0.$$

Để tìm tọa độ điểm I, tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác, ta có thể làm theo hai cách :

Cách 1 :

Viết phân giác BE của góc B và tìm tọa độ giao điểm của BE với AD.

Cách 2 :

Ta nhận xét rằng trong tam giác ABD thì BI là phân giác của góc ABD, nên I là điểm chia đoạn thẳng AD theo tỉ số $\dfrac{BD}{BA}$.

Kết quả, ta được : $I\left(\dfrac{11 - 5\sqrt{17}}{4}; \dfrac{23 - 5\sqrt{17}}{4}\right)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho đường thẳng $\Delta : 2x + 3y - 6 = 0$ và bốn điểm A(0; 2); B(1; 1); C(–2; 4); D(5; –1).

a) Xác định vị trí tương đối của các điểm A, B, C, D đối với Δ.

b) Δ cắt những đoạn thẳng nào trong các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, BD, CD ?

c) Δ cắt những đường thẳng nào trong các đường thẳng AB, AC, AD, BC, BD, CD ? Trong trường hợp Δ cắt các đường thẳng ấy, hãy tìm tọa độ giao điểm ?

Gợi ý : a) $A \in \Delta$; B, C, D không thuộc Δ;

B khác phía với C, D đối với Δ.

b) Δ cắt AC, AB, AD, BC, BD, không cắt CD.

c) Δ cắt tất cả 6 đường thẳng.

2. Cho 3 đường thẳng $\Delta_1 : 2x + 3y + 4 = 0$

$$\Delta_2 : 3x - 5y - 13 = 0$$

$$\Delta_3 : -5x + y + 7 = 0$$

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng này đồng quy.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ_4 đi qua giao điểm của các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và đi qua điểm M(3; –5).

Gợi ý :

a) Chứng tỏ tọa độ giao điểm của Δ_1, Δ_2 thỏa mãn phương trình Δ_3.

b) Sử dụng kiến thức chùm.

Δ_4 thuộc chùm xác định bởi Δ_1, Δ_2 nên phương trình có dạng :

$$p(2x + 3y + 4) + q(3x - 5y - 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2p + 3q)x + (3p - 5q)y + 4p - 13q = 0 \qquad (*)$$

Δ_4 đi qua M(3; –5) cho ta :

$$(2p + 3q).3 + (3p - 5q)(-5) + 4p - 13q = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -5p + 21q = 0$$

Chọn $q = 5 \Rightarrow p = 21$. Đem thế vào phương trình (*) ta được phương trình $\Delta_4 : 57x + 38y + 19 = 0$.

3. Cho ba đường thẳng : $\Delta_1 : 4x + y + 7 = 0$

$$\Delta_2 : 2x - 5y + 9 = 0$$

$$\Delta_3 : m^2x + 2(m - 1)y + 3 = 0$$

trong đó m là một tham số, $m \neq 0$.

Xác định giá trị m để ba đường thẳng này đồng quy.

Đáp số : $m = -1$; $m = \frac{1}{4}$.

4. Cho tam giác ABC có ba cạnh nằm trên ba đường thẳng :

AB : $x - 4 = 0$;

BC : $3x - 4y + 36 = 0$;

CA : $4x + 3y + 23 = 0$.

a) Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác; chứng minh ΔABC là tam giác vuông.

b) Viết phương trình các đường trung tuyến.

c) Viết phương trình các đường phân giác trong suy ra tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp.

Đáp số : a) $A(4; -13)$; $B(4; 12)$; $C(-8; 3)$

b) Độc giả tự giải.

c) AD : $3x + y + 1 = 0$;

BE : $2x - y + 4 = 0$;

CF : $x + 7y - 13 = 0$;

$I(-1; 2)$.

5. Cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(-3; 0)$; $B(5; 0)$; $C(6; -6)$.

a) Tính tọa độ các trung điểm A', B', C' theo thứ tự của các cạnh BC, CA, AB và viết phương trình các đường thẳng AA', BB', CC'.

b) Tìm tọa độ giao điểm G của AA', BB'.

Chứng minh rằng đường thẳng CC' cùng đi qua điểm G.

c) Xét xem liệu phương trình $x - y + 4 = 0$ có phải là phương trình của đường thẳng AC' ?

§2. Quan hệ song song trong mặt phẳng

Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$;

$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Nếu $A_2, B_2, C_2 \neq 0$ *thì điều kiện để* $\Delta_1 // \Delta_2$ *là :*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

tức là các hệ số của các biến tỉ lệ với nhau và không tỉ lệ với các số hạng độc lập.

Từ đây, nếu ta chọn hệ số tỉ lệ là 1, ta có :

$$A_1 = A_2; \quad B_1 = B_2 \quad \text{và} \quad C_1 \neq C_2.$$

Như vậy, đối với hai đường thẳng song song thì trong phương trình của chúng ta có thể chọn để cho phần chứa biến hoàn toàn giống nhau và chỉ khác nhau ở số hạng độc lập.

Nếu phương trình của đường thẳng Δ *là* $Ax + By + C = 0$ *thì ta có thể viết phương trình đường thẳng* $\Delta' \,//\, \Delta$ *là* $Ax + By + C' = 0$.

Và trong các bài toán cụ thể, C' *được xác định nhờ vào các điều kiện của giả thiết.*

Cũng cần biết rằng hai đường thẳng song song với nhau thì có chung một vectơ chỉ phương.

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 29. Viết phương trình đường thẳng Δ' trong các trường hợp sau :

a) Song song với đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 11 + 5t \end{cases}$ và đi qua điểm $A(-3; 4)$.

b) Song song với đường thẳng $\Delta : 7x - 2y + 13 = 0$ và đi qua điểm $B(11; -3)$.

Hướng dẫn

a) Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 5)$.

$\Delta' \,//\, \Delta$ nên Δ' nhận $\vec{a}$ làm một vectơ chỉ phương.

Δ' có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 5)$ và đi qua $A(-3; 4)$ nên có phương trình tham số : $\Delta' : \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 4 + 5t \end{cases}$

và có phương trình tổng quát $\Delta' : 5x + y + 11 = 0$.

b) Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $\Delta : 7x - 2y + 13 = 0$ nên có phương trình dạng : $\Delta' : 7x - 2y + C' = 0$.

Vì Δ' đi qua $B(11; -3)$ nên : $7.11 - 2.(-3) + C' = 0 \Rightarrow C' = -83$.

Vậy phương trình Δ' là : $7x - 2y - 83 = 0$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho ba điểm A(−2; 3); B$\left(\frac{5}{2}; 1\right)$; C(4; −1).

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Viết phương trình đường thẳng qua C và song song với AB.

Gợi ý :

a) So sánh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Đường thẳng cần tìm đi qua C(4; −1) và nhận vectơ $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{9}{2}; -2\right)$ làm một vectơ chỉ phương.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm : A$\left(\frac{1}{3}; -2\right)$; B(1; −1); C(−1; −4); D(2; 2).

a) Chứng minh điểm C nằm trên đường thẳng AB còn điểm D không nằm trên đường thẳng AB.

b) Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng qua tâm D của các điểm A, B, C. Chứng minh ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

c) Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng AB và A'B'.

Gợi ý :

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng và ba điểm A, B, D không thẳng hàng.

b) Sử dụng công thức tọa độ trung điểm tính tọa độ của A', B', C' và so sánh các vectơ $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$.

c) AB // A'B'.

3. Cho đường thẳng Δ : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 7t \end{cases}$ và điểm A(1; 3).

a) Chứng minh điểm A không thuộc Δ.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với với Δ qua điểm A.

4. Cho hình bình hành ABCD có hai đỉnh liên tiếp A(−1; 2); B(3; 1) và tâm đối xứng I(2; 2).

Viết phương trình các cạnh và các đường chéo của hình bình hành.

5. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng :

$$\Delta_1 : x + 3y + 3 = 0; \qquad \Delta_2 : 5x - 2y - 19 = 0$$

và song song với đường thẳng $\Delta_3 : -2x + 3y + 11 = 0$.

Gợi ý : Sử dụng kiến thức về chùm đường thẳng.

6. Cho tam giác ABC có đỉnh A(1; 3) và hai đường trung tuyến có phương trình :

$$x - 2y + 1 = 0 \quad \text{và} \quad y - 1 = 0.$$

a) Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

b) Viết phương trình các cạnh của tam giác và trung tuyến còn lại.

§3. Quan hệ vuông góc trong mặt phẳng

1. Điều kiện vuông góc của hai đường thẳng

Ta đã biết điều kiện cần và đủ để hai vectơ vuông góc với nhau là tích vô hướng của chúng bằng 0.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \quad \text{với} \quad \vec{u} = (x; y); \quad \vec{v} = (x', y') :$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x.x' + y.y' = 0.$$

Với hai đường thẳng $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

thì các vectơ chỉ phương $\vec{a_1} = (-B_1; A_1)$; $\vec{a_2} = (-B_2; A_2)$.

Rõ ràng $\vec{a_1} \perp \vec{a_2} \Leftrightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2$ *nên điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng vuông góc là :*

$$A_1.A_2 + B_1.B_2 = 0.$$

Đặc biệt nếu Δ_1, Δ_2 *được cho trước dưới dạng phương trình theo hệ số góc :*

$$\Delta_1 : y = kx + m$$

$$\Delta_2 : y = k'x + n$$

theo điều kiện vuông góc là $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k.k' = -1$.

2. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với đường thẳng cho trước

Từ điều kiện vuông góc của hai đường thẳng :

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad \text{ta suy ra} \quad A_1A_2 = -B_1B_2.$$

Nếu $A_2 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, *ta có :* $\dfrac{A_1}{B_1} = -\dfrac{B_2}{A_2}$.

Điều này gợi ý cho ta nếu chọn $A_2 = B_1$ *và* $B_2 = -A_1$ *thì ta sẽ được hai đường thẳng vuông góc với nhau.*

Như vậy, với đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$ *thì phương trình đường thẳng* $\Delta' \perp \Delta$ *có dạng là :*

$$\Delta' : Bx - Ay + C' = 0.$$

Việc xác định C' *sẽ do điều kiện cụ thể trong giả thiết của bài toán quy định.*

Cũng tương tự, ta nên nhớ vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ *thì vectơ* $\vec{a}' \perp \vec{a}$ *là* $\vec{a}' = (a_2; -a_1)$ *hoặc* $(-a_2; a_1)$.

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 30. Viết phương trình đường thẳng Δ' trong các trường hợp sau :

a) Đi qua điểm A(−1; 5) và vuông góc với đường thẳng :

$$\Delta' : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$$

b) Đi qua điểm B(3; 7) và vuông góc với đường thẳng $\Delta : 4x - 5y - 11 = 0$.

c) Đi qua giao điểm của hai đường thẳng :

$\Delta_1 : x - 3y - 10 = 0$; $\qquad \Delta_2 : 2x + 5y + 13 = 0$

và vuông góc với đường thẳng $\Delta_3 : 3x - 2y - 17 = 0$.

Hướng dẫn

a) Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-2; 3)$.

Gọi (x; y) là tọa độ của điểm M ∈ Δ', thế thì vectơ $\overrightarrow{AM}$ là một vectơ chỉ phương của Δ' :

$$\vec{a}' = \overrightarrow{AM} = (x + 1; y - 5).$$

$\Delta' \perp \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a'}.\vec{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}.\vec{a} = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2(x + 1) + 3(y - 5) = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2x + 3y - 17 = 0$

Phương trình của Δ' là : $-2x + 3y - 17 = 0$.

b) Phương trình của Δ là $4x - 5y - 11 = 0$, do vậy phương trình của $\Delta' \perp \Delta$ có dạng

$$\Delta' : -5x - 4y + C = 0.$$

Δ' đi qua B(3; 7) cho ta : $-5.3 - 4.7 + C = 0 \Rightarrow C = 43$

Vậy phương trình của Δ' là :

$$-5x - 4y + 43 = 0 \quad \text{hay} \quad 5x + 4y - 43 = 0.$$

Chú ý : Ta có thể giải như câu a) :

Gọi $M(x; y) \in \Delta'$ thế thì $\overrightarrow{BM} = (x - 3; y - 7)$.

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-5; -4)$.

$\Delta' \perp \Delta \quad \Leftrightarrow \quad -5(x - 3) + (-4)(y - 7) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5x - 4y + 43 = 0.$

c) Giải hệ : $\begin{cases} x - 3y - 10 = 0 \\ 2x + 5y + 13 = 0 \end{cases}$

ta tìm được giao điểm A của Δ_1, Δ_2 là : A(1; -3).

Bài toán đưa về viết phương trình đường thẳng Δ' đi qua A(1; -3) và vuông góc với $\Delta_3 : 3x - 2y - 17 = 0$ và ta có kết quả :

$$\Delta' : 2x + 3y + 7 = 0.$$

Ta có thể giải bài này nhờ vào các kiến thức về chùm đường thẳng mà không cần giải hệ phương trình để tìm giao điểm A của Δ_1 và Δ_2.

Dễ thấy Δ' thuộc chùm đường thẳng xác định bởi Δ_1, Δ_2 nên phương trình của Δ' có dạng :

$$p(x - 3y - 10) + q(2x + 5y + 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (p + 2q)x - (3p - 5q)y - 10p + 13q = 0 \qquad (*)$$

Điều kiện để Δ' vuông góc với Δ_3 là :

$$3(p + 2q) - (-2)(3p - 5q) = 0 \quad \Rightarrow \quad 9p - 4q = 0$$

Chọn $p = 4 \Rightarrow q = 9$.

Đem các giá trị này thế vào phương trình (*), ta được :

$$(4 + 2.9)x - (3.4 - 5.9)y - 10.4 + 13.9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 22x + 33y + 77 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3y + 7 = 0.$$

Bài 31. Cho tam giác ABC có ba cạnh thuộc ba đường thẳng :

$$AB : 2x + 3y - 7 = 0$$

$$BC : 2x + y - 5 = 0$$

$$CA : 6x + 5y - 9 = 0$$

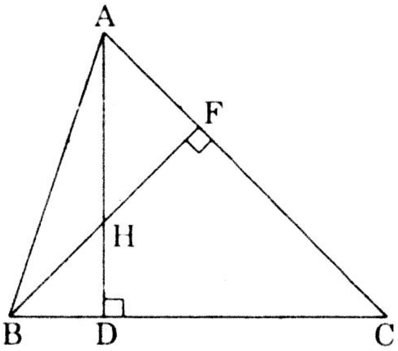
a) Viết phương trình đường cao AD và tìm tọa độ điểm D.

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác.

Hướng dẫn

a) Giải hệ $\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ 6x + 5y - 9 = 0 \end{cases}$

ta tìm được tọa độ đỉnh A(–1; 3).



Bài toán tìm phương trình đường cao AD được đưa về việc viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(–1; 3) và vuông góc với đường thẳng

$$BC : 2x + y - 5 = 0.$$

Ta có kết quả AD : $x - 2y + 7 = 0$.

Điểm D là giao điểm của đường thẳng BC và đường thẳng AD nên tọa độ của D là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x - 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{3}{5}; \frac{19}{5}\right).$$

b) Ta viết được phương trình đường cao BF là : $5x - 6y - 4 = 0$.

Tọa độ H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ 5x - 6y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{25}{2}; \frac{39}{4}\right).$$

Bài 32. Cho tam giác ABC với A(3; 1); B(–2; 5); C(–4; –7).

a) Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB.

b) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn

a) Gọi Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AB thì Δ là đường thẳng vuông góc với AB tại trung điểm I của AB.

Tọa độ trung điểm I : $x_I = \frac{1}{2}$; $y_I = 3$.

Gọi $M(x; y) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(x - \frac{1}{2}; y - 3\right)$.

Đường thẳng AB có 1 vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-5; 4)$.

$$\Delta \perp AB \Leftrightarrow -5\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4(y - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -5x + 4y - \frac{19}{2} = 0 \Leftrightarrow 10x - 8x + 19 = 0.$$

Chú ý : Để viết phương trình đường trung trực của một đoạn thẳng, ta có thể vận dụng quỹ tích cơ bản : "Đường trung trực của một đoạn thẳng là quỹ tích những điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng ấy".

Gọi M(x; y) là điểm thuộc trung trực của đoạn thẳng AB ta có :

$$MA = MB$$

$$\Rightarrow MA^2 = MB^2$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (x + 2)^2 + (y - 5)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25$$

$$\Leftrightarrow -10x + 8y - 19 = 0.$$

Đó chính là phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB.

b) Vì tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là giao điểm của các đường trung trực của AB, BC, CA nên ta cần viết thêm phương trình của đường trung trực của cạnh BC (hoặc AC).

Ta viết được phương trình đường trung trực của cạnh BC là :

$$x - 6y - 9 = 0.$$

Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 6y - 9 = 0 \\ 10x - 8y + 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{21}{26}; -\frac{109}{52}\right).$$

Bài 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(1; 4) và hai đường thẳng :

$$\Delta_1 : 3x + y - 7 = 0 \quad \text{và} \quad \Delta_2 : 5x - y - 17 = 0.$$

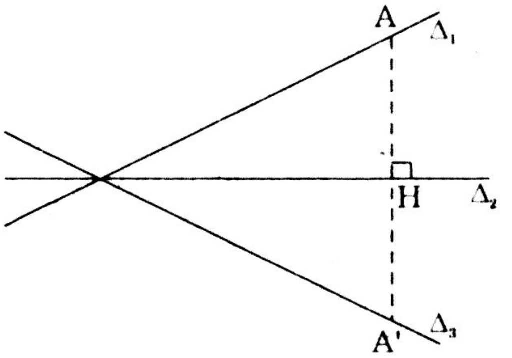
a) Xác định vị trí tương đối của điểm A đối với Δ_1 và Δ_2.

b) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm A trên đường thẳng Δ_2.

c) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua H.

d) Viết phương trình đường thẳng Δ_3 đi qua giao điểm của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và đi qua A'.

Hướng dẫn



a) Thế tọa độ của A vào phương trình của Δ_1 và Δ_2 ta có $A \in \Delta_1$; $A \notin \Delta_2$.

b) Δ' là đường thẳng đi qua A và vuông góc với Δ_2 có phương trình :

$$x + 5y - 21 = 0.$$

H là giao điểm của Δ' và Δ_2 nên tọa độ của H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + 5y - 21 = 0 \\ 5x - y - 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{53}{43}; \frac{44}{13}\right).$$

c) Gọi tọa độ của A' là (x; y) thì : $\overrightarrow{AA'} = (x - 1; y - 4)$.

$$\overrightarrow{AH} = \left(\frac{40}{13}; -\frac{8}{13}\right).$$

A và A' đối xứng với nhau qua H nên ta có :

$$x - 1 = 2.\frac{40}{13} \Rightarrow x = \frac{93}{13}$$

$$y - 4 = 2.\left(-\frac{8}{13}\right) \Rightarrow y = \frac{36}{13}$$

$$\Rightarrow A'\left(\frac{93}{13}; \frac{36}{13}\right).$$

d) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có định thức D = −8 ≠ 0 nên chúng cắt nhau và xác định một chùm đường thẳng. Δ_3 thuộc chùm xác định bởi Δ_1, Δ_2 và đi qua A'. Ta viết được phương trình :

$$\Delta_3 : 31x - 27y - 147 = 0.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho tam giác ABC với A(4; −2); B(−4; −1); C(2; 8).

a) Chứng minh rằng điểm H(−2; 2) là trực tâm của tam giác.
Viết phương trình đường cao AD và tìm tọa độ điểm D.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, nghiệm lại hệ thức Euler :

$$\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}.$$

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác. Chứng tỏ ba điểm H, I, G thẳng hàng.

Gợi ý : a) Tính $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$; AD : $2x - 3y - 2 = 0$.

b) Tính tổng $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$, so sánh với $\overrightarrow{IH}$.

c) Tính $\overrightarrow{IH}$ và $\overrightarrow{IG}$. Chứng minh hai vectơ này cùng phương.

2. Cho đường thẳng Δ : $2x - y + 1 = 0$ và điểm A(3; 5).

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của A trên Δ.

b) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua Δ.

c) Tính khoảng cách AA'.

3. Cho đường thẳng Δ có phương trình Δ : $4x - 3y + 12 = 0$ và ba điểm : A(2; 2); B(5; 3); C(−2; 7).

a) Xác định vị trí tương đối của các điểm A, B, C đối với Δ.

b) Tìm trên Δ một điểm P để tổng PB + PC có giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm trên Δ một điểm Q để hiệu |QA − QB| đạt giá trị lớn nhất.

d) Tìm trên Δ một điểm R để tổng RA + RB đạt giá trị nhỏ nhất.

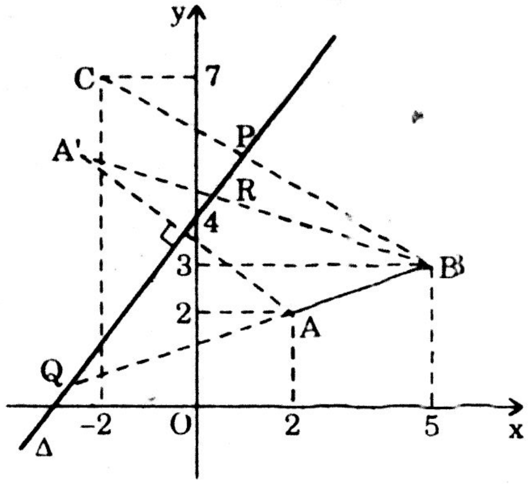
Gợi ý :

a) A và B **cùng** thuộc một nửa mặt phẳng bờ là Δ. C thuộc nửa mặt phẳng đối.

(Thế các tọa độ của A, B, C vào phương trình Δ).

b) Áp dụng bất đẳng thức tam giác PB + PC ≥ BC

⇒ P là giao điểm của BC với Δ.



c) Ta cũng có $|QA - QB| \geq AB$ $\Rightarrow$ Q là giao điểm của Δ với AB.

d) Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ.

$RA = RA'$ $\Rightarrow$ $RA + RB = RA' + RB \geq A'B$

$\Rightarrow$ $RA' + RB' = A'B$ khi A', R, B thẳng hàng

$\Rightarrow$ R là giao điểm của Δ với A'B.

4. Cho ΔABC, biết cạnh AB nằm trên đường thẳng $5x - 3y + 2 = 0$ và các đường cao AA', BB' theo thứ tự nằm trên các đường thẳng :

$$\Delta_1 : 4x - 3y + 1 = 0 \quad \text{và} \quad \Delta_2 : 7x + 2y - 22 = 0.$$

a) Viết phương trình đường cao thứ ba CC'.

b) Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Gợi ý :

a) CC' là đường thẳng thuộc chùm xác định bởi Δ_1, Δ_2 và vuông góc với AB.

b) Cạnh BC thuộc chùm (BA, BB') và vuông góc với BC.

Cạnh AC thuộc chùm (AC, AA') và vuông góc với BB'.

Đỉnh B là giao điểm của AB, BC;

Đỉnh C là giao điểm của AC, BC;

Đỉnh A là giao điểm của AB, AC.

5. Cho tam giác ABC biết A(3; −4) và hai đường cao nằm trên hai đường thẳng $\Delta_1 : 9x - 3y - 4 = 0$ và $\Delta_2 : x + y - 2 = 0$.

a) Viết phương trình các cạnh và đường cao AD.

b) Tìm tọa độ các đỉnh.

Gợi ý :

a) Hai đường cao đã cho không xuất phát từ đỉnh A. Đường cao AD thuộc chùm xác định bởi Δ_1, Δ_2 và đi qua A.

b) Hãy viết phương trình các cạnh.

6. Cho hình vuông có một cạnh nằm trên đường thẳng $x + y + 3 = 0$ và tâm đối xứng I(−2; 0).

a) Lập phương trình các cạnh và các đường chéo.

b) Tìm tọa độ các đỉnh.

§4. Góc giữa hai đường thẳng và khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

1. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$

Góc φ *giữa hai đường thẳng được tính theo công thức :*

$$\cos\varphi = \frac{|A_1.A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Góc giữa hai đường thẳng luôn nhỏ hơn hoặc bằng 90^0.

2. Khoảng cách

a) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0)$ *đến đường thẳng* $\Delta : Ax + By + C = 0$ *được tính theo công thức :*

$$d(M_0; \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

b) Phân giác của một góc

Ta đã biết, đường phân giác của một góc là quỹ tích của những điểm cách đều hai cạnh của một góc. Do vậy, với hai đường thẳng

$\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

thì phương trình hai đường phân giác của các góc do Δ_1, Δ_2 *tạo thành là :*

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 34.

a) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm P(1; 2) và tạo với đường thẳng d : $3x - 2y + 1 = 0$ một góc 45^0.

b) Cho tam giác ABC có ba cạnh nằm trên ba đường thẳng :

$$\Delta_1 : 4x - y - 19 = 0$$

$$\Delta_2 : x - 4y + 14 = 0$$

$$\Delta_3 : x + y - 6 = 0.$$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác cân.

Hướng dẫn

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $P(1;\ 2)$ có phương trình

$$\Delta : A(x - 1) + B(y - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By - A - 2B = 0 \qquad (*)$$

Góc giữa Δ và d được cho bởi :

$$\cos\varphi = \frac{|A.3 + B.(-2)|}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{3^2 + (-2)^2}}.$$

Theo giả thiết $\varphi = 45^0 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ta được :

$$\frac{|3A - 2B|}{\sqrt{13}\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Cả hai vế đều không âm, ta bình phương cả hai vế và rút gọn, ta được một phương trình bậc hai mà ta coi A là ẩn, B là số đã biết và tính A theo B : $5A^2 - 24B.A - 5B^2 = 0$.

Biệt thức $\Delta' = 169B^2$

cho ta $A = \dfrac{12B \pm 13B}{5} \Rightarrow A_1 = 5B; \quad A_2 = -\dfrac{1}{5}B.$

Chọn $B = 5$ thì $A_1 = 25$ và $A_2 = -1$.

Đem thế các giá trị này vào phương trình (*) ta được hai đường thẳng Δ thỏa mãn yêu cầu :

$$\Delta_1 : 5x + y - 7 = 0; \qquad \Delta_2 : x - 5y + 9 = 0.$$

b) Ta có góc giữa Δ_3, Δ_1 là : $\cos\varphi_1 = \dfrac{|4.1 + (-1).1|}{\sqrt{4^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}.$

Góc giữa Δ_2, Δ_3 là : $\cos\varphi_2 = \dfrac{|1.1 + 1.(-4)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}.$

Do đó $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$.

Vì φ_1, φ_2 đều là góc nhọn nên $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$.

Tam giác ABC có hai góc bằng nhau. Vậy nó là tam giác cân.

Chú ý : Ta có thể giải bài này dựa vào các kiến thức khoảng cách.

Gọi A là giao điểm của Δ_1, Δ_2 thì tọa độ của A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 4x - y - 19 = 0 \\ x - 4y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A(2; 4).$$

Tương tự ta có : B(5; 1), C(6; 5).

$$AC^2 = (6 - 2)^2 + (5 - 4)^2 = 17.$$

$$BC^2 = (6 - 5)^2 + (5 - 1)^2 = 17.$$

$$AC^2 = BC^2 \quad \Rightarrow \quad CA = CB.$$

Tam giác ABC cân, đỉnh C.

Bài 35. Cho tam giác ABC có ba cạnh nằm trên ba đường thẳng :

$$AB : 2x - y + 2 = 0$$

$$BC : x - 2y - 5 = 0$$

$$CA : 2x + y - 10 = 0.$$

a) Tính chiều cao AH của tam giác.

b) Viết phương trình đường phân giác trong của **góc** B và tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp trong tam giác.

Hướng dẫn

a) Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ 2x + y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A(2; 6).$

$$AH = d(A; BC) = \frac{|2 - 2.6 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}.$$

b) Ta tính được tọa độ đỉnh C(5; 0).

Hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng AB, BC là :

$$\frac{2x - y + 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \pm \frac{x - 2y - 5}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}.$$

Sau khi rút gọn, ta được phương trình hai phân giác trong và ngoài góc B là : $p_1 : x + y + 7 = 0;$

$$p_2 : x - y - 1 = 0.$$

Lần lượt thế tọa độ của A và C vào phương trình của p_2 :

$$A(2; 6) \Rightarrow \quad 2 - 6 - 1 = -2 - 6 - 1 = -5 < 0.$$

$$C(5; 0) \Rightarrow \quad 5 - 0 - 1 = 4 > 0.$$

Vậy hai điểm A, C nằm về hai phía đối với p_2 hay p_2 là phân giác trong của góc B.

Tương tự, ta viết được phân giác trong của góc C là : $x + 3y - 5 = 0$.

Tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp trong tam giác là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad I(2; 1).$$

Chú ý : So sánh cách viết phân giác trong của góc B trên đây với cách viết phân giác trong ở bài 28.

Bài 36. Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng của đường thẳng Δ qua đường thẳng Δ_1 với :

$$\Delta : x + y - 3 = 0; \qquad \Delta_1 : 4x + 2y - 13 = 0.$$

Hướng dẫn

Ta biết, hai cạnh của một góc thì đối xứng với nhau qua phân giác của góc, do vậy nếu Δ' đối xứng với Δ qua Δ_1 thì Δ' tạo với Δ_1 một góc bằng với góc tạo bởi Δ và Δ_1.

Gọi φ là góc giữa Δ và Δ_1, ta có :

$$\cos\varphi = \frac{|4.1 + 2.1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Giao điểm P của Δ và Δ_1 có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 4x + 2y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad P\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua Δ_1 chính là đường thẳng đi qua $P\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và tạo với Δ_1 một góc mà có cosin của nó là bằng $\frac{\sqrt{3}}{10}$.

Gọi k là hệ số góc của Δ' thì phương trình của Δ' có dạng :

$$y + \frac{1}{2} = k\left(x - \frac{7}{2}\right) \Rightarrow \quad kx - y - \frac{7}{2}k - \frac{1}{2} = 0 \qquad (*)$$

Góc φ' giữa Δ' và Δ_1 là :

$$\cos\varphi' = \frac{|4.k + 2.(-1)|}{\sqrt{k^2+1}.\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{2|2k-1|}{\sqrt{20}\sqrt{k^2+1}}.$$

Vì φ' = φ nên ta có : $\frac{2|2k-1|}{\sqrt{20}\sqrt{k^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được phương trình bậc hai :

$$k^2 + 8k + 7 = 0 \Rightarrow k_1 = -1, \quad k_2 = -7.$$

Thế các giá trị này vào phương trình (*) ta được :

- Với k = −1 $\Rightarrow$ $\Delta'_1 : x + y - 3 = 0$.
- Với k = −7 $\Rightarrow$ $\Delta'_2 : 7x + y - 24 = 0$.

Dễ thấy $\Delta'_1 : x + y - 3 = 0$ chính là đường thẳng Δ.

Vậy đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua Δ_1 là Δ' : 7x + y − 24 = 0.

Chú ý : Ta có thể giải bài này một cách khác.

Lấy một điểm M thuộc Δ, chẳng hạn M(1; 2).

Ta tìm được tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua Δ (xem bài 33) là M' (3; 3). Δ' chính là đường thẳng thuộc chùm xác định bởi Δ và Δ_1 và đi qua M' nên phương trình Δ' có dạng :

$$p(x + y - 3) + q(4x + 2y - 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (p + 4q)x + (p + 2q)y - 3p - 13q = 0 \quad (*)$$

Δ' đi qua M'(3; 3) $\Leftrightarrow$ 3p + 5q = 0.

Chọn p = 5 $\Rightarrow$ q = −3.

Đem thế vào phương trình (*) ta được phương trình Δ' :

$$\Delta' : 7x + y - 24 = 0.$$

Nếu không muốn sử dụng chùm đường thẳng thì sau khi tính được tọa độ giao điểm P của Δ, Δ_1 và tọa độ điểm M', ta viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm P, M'. Đó chính là đường thẳng Δ'.

Bài 37. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng Δ : x − 2y − 1 = 0 và hai điểm A(1; 2); B(4; −3).

Tìm điểm C thuộc đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 2.

Hướng dẫn

Đường thẳng AB có phương trình tổng quát : $4x + 3y - 7 = 0$.

Đường thẳng Δ có phương trình tham số Δ : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t. \end{cases}$

Điểm $C \in \Delta$ có tọa độ $C(1 + 2t_0; t_0)$.

Thế tọa độ của C vào công thức tính khoảng cách từ C đến AB, ta được :

$$d(C; AB) = \frac{4(1 + 2t_0) + 3.t_0 - 7}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|11t_0 - 3|}{5}.$$

Theo giả thiết, ta có :

$$\frac{|11t_0 - 3|}{5} = 2 \quad \Rightarrow \quad 11t_0 - 3 = \pm 30;$$

ta được hai giá trị của t : $t_0 = 3$ và $t_0 = -\frac{27}{11}$.

Từ đây ta được hai điểm C thỏa mãn yêu cầu :

$$C_1(7; 3); \quad C_2\left(-\frac{43}{11}; \frac{27}{11}\right).$$

Chú ý : Có thể giải như sau :

Gọi (x_0, y_0) là tọa độ điểm C thì vì $C \in \Delta$ nên ta có :

$$x_0 - 2y_0 - 1 = 0 \quad \text{và} \quad \frac{|4x_0 + 3y_0 - 7|}{5} = 2.$$

Ta giải các hệ : $\begin{cases} x_0 - 2y_0 - 1 = 0 \\ 4x_0 + 3y_0 - 7 = 30 \end{cases} \Rightarrow C_1(7; 3);$

và $\begin{cases} x_0 - 2y_0 - 1 = 0 \\ 4x_0 + 3y_0 - 7 = -30 \end{cases} \Rightarrow C_2\left(-\frac{43}{11}; \frac{27}{11}\right).$

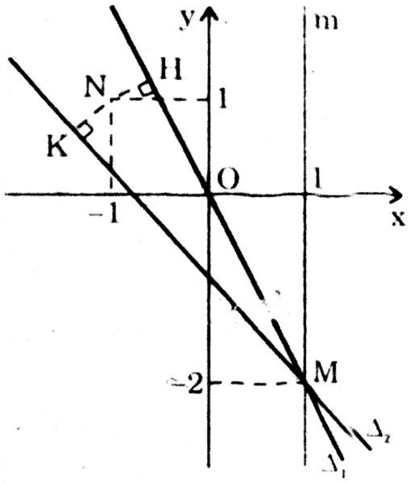
Bài 38. Cho hai điểm M(1; −2) và N(−1; 1). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cách N một đoạn bằng $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Hướng dẫn

Xét đường thẳng m đi qua M(1; −2) và song song với trục Oy có phương trình m : $x - 1 = 0$.

Khoảng cách từ N đến m là : $d(N;\, m) = \dfrac{|-1-1|}{\sqrt{1}} = 2.$

Vì $2 \neq \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ nên đường thẳng m không thỏa mãn đầu bài. Như vậy các đường thẳng Δ cần tìm không có đường thẳng nào song song với Oy. Và ta có thể coi các đường thẳng như vậy là các đường thẳng có hệ số góc k.



Phương trình các đường thẳng Δ có dạng :

$$y + 2 = k(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad kx - y - k - 2 = 0 \qquad (*)$$

$$d(N;\, \Delta) = \frac{|k(-1) - 1 - k - 2|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Theo bài ra, ta có : $\dfrac{|2k+3|}{\sqrt{k^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được phương trình :

$$19k^2 + 60k + 44 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -2; \quad k_2 = -\frac{22}{19}.$$

Lần lượt thế các giá trị $k_1 = -2$; $k_2 = -\dfrac{22}{19}$ vào phương trình (*), ta tìm được hai đường thẳng Δ :

$$\Delta_1 : 2x + y = 0 \quad \text{và} \quad \Delta_2 : 22x + 19y + 16 = 0.$$

Chú ý :

Có thể viết phương trình Δ dưới dạng $A(x - 1) + B(y + 2) = 0$ và đi đến một phương trình bậc hai đối với ẩn A (coi B như đã biết).

$$19A^2 - 60BA + 44B^2 = 0.$$

Biệt thức $\Delta' = 144B^2 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 2B; \quad A_2 = \dfrac{22}{19}B.$

Với $A_1 = 2B$ chọn $B = 1 \Rightarrow A = 2$ và được $\Delta_1 : 2x + y = 0.$

Với $A_2 = \dfrac{22}{19}B$ chọn $B = 19 \Rightarrow A = 22$ và được $\Delta_2 : 22x + 19y + 16 = 0.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = -2t \\ y = -3t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 3s + 1 \\ y = 6s + 3. \end{cases}$

a) Tìm tọa độ giao điểm của Δ_1, Δ_2.

b) Tìm góc tạo bởi Δ_1, Δ_2.

c) Viết phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi Δ_1, Δ_2.

2. Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : 2x + y + 1 = 0$

và $\Delta_2 : 5x - 2y - 11 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng Δ_1 qua đường thẳng Δ_2.

3. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC biết đỉnh B(2; –1), đường cao AH : $3x - 4y + 27 = 0$ và phân giác CD : $x + 2y - 5 = 0$.

Gợi ý : AB : $4x + 7y - 1 = 0$.

BC : $4x + 3y - 5 = 0$.

CA : $y - 3 = 0$.

4. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M(2; –1) và tạo với hai đường thẳng $\Delta_1 : 2x - y + 5 = 0$ và $\Delta_2 : 3x + 6y - 1 = 0$ một tam giác cân mà đỉnh là giao điểm của Δ_1, Δ_2.

Gợi ý : $\Delta : 3x + y - 5 = 0$.

$\Delta' : x - 3y - 5 = 0$.

5. Viết phương trình các cạnh của tam giác cân ABC, biết cạnh đáy nằm trên đường thẳng $2x - 3y - 5 = 0$. Một cạnh bên nằm trên đường thẳng $x + y + 1 = 0$ và cạnh bên còn lại đi qua điểm P(1; 1).

Gợi ý : $17x + 7y - 24 = 0$.

6. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết đỉnh $A\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$

và phân giác BE : $x - 2y - 1 = 0$,

CF : $x + 3y - 1 = 0$.

Gợi ý : AB : $4x - 3y + 1 = 0$.

BC : $y + 1 = 0$.

CA : $3x + 4y - 8 = 0$.

7. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $P(2; -3)$ và cách đường thẳng $d : 4x + 3y - 10 = 0$ một đoạn bằng 2.

Gợi ý : $\Delta : 2x + y - 1 = 0$.

8. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $2x + 6y - 3 = 0$ và cách điểm $A(5; 4)$ một khoảng bằng $\sqrt{10}$.

Gợi ý : $\Delta_1 : 3x - y - 21 = 0$.

$\Delta_2 : 3x - y - 1 = 0$.

9. Viết phương trình đường thẳng cách điểm $A(1; 1)$ một khoảng bằng 1 và cách điểm $B(2; 3)$ một khoảng bằng 4.

10. Cho hai điểm $A(0; 4)$; $B(5; 0)$ và đường thẳng $\Delta : 2x - 2y + 1 = 0$.

Viết phương trình các đường thẳng Δ_1, Δ_2 theo thứ tự đi qua A; B và tạo thành các góc nhận Δ làm một đường phân giác.

Gợi ý : $\Delta_1 : 3x + y - 4 = 0$.

$\Delta_2 : x + 3y - 5 = 0$.

§5. Phương trình đường tròn

1. Phương trình tổng quát

Đường tròn tâm I (a; b) và bán kính R có phương trình tổng quát là :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (1)$$

Từ phương trình dạng (1) ta có thể biến đổi đưa về dạng :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \qquad (2)$$

với $c = a^2 + b^2 - R^2$.

Với điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$ *thì (2) là phương trình đường tròn tâm* $I(a; b)$ *và bán kính* $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

2. Chú ý

a) *Từ dạng (2) ta thấy rằng một phương trình bậc hai hai ẩn* $f(x; y) = 0$ *là một phương trình đường tròn khi :*

- *Hệ số của các hạng tử* x^2; y^2 *là bằng nhau.*
- *Không chứa hạng tử tích* $x.y$.
- *Thỏa mãn điều kiện* $a^2 + b^2 - c > 0$.

b) *Cũng từ dạng (2) ta thấy nếu* $c \leq 0$ *thì chắc chắn (2) là phương trình của một đường tròn, trừ trường hợp* $a^2 + b^2 - c = 0$.

c) *Người ta cũng còn viết phương trình đường tròn dưới dạng :*

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

với điều kiện $A^2 + B^2 - C > 0$.

Trong dạng này, tâm $I(-A; -B)$ *và bán kính* $R = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$.

Đối với các đường tròn, khi cho biết phương trình của đường tròn thì ta có thể xác định được tâm và bán kính của nó. Ngược lại, để xác định được một đường tròn thì ta cần ***biết tâm và bán kính*** *của đường tròn ấy. Tâm của đường tròn là* ***một điểm****. Trong hình học,* ***điểm*** *được hình dung như là* ***giao của hai đường****, do vậy tâm của đường tròn được xác định bởi* ***hai điều kiện*** *và từ hai điều kiện này, ta đi đến* ***một hệ phương trình*** *mà nghiệm của hệ cho ta tọa độ tâm của đường tròn.*

3. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Cho đường tròn (C) có phương trình : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

và một điểm $M(x_0; y_0)$ *bất kì trong mặt phẳng.*

Đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ *và bán kính R.*

Một cát tuyến qua M cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Người ta gọi phương tích của điểm M đối với đường tròn (C), kí hiệu $\mathscr{P}_{M/(C)}$*, là tích* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

Ta có $\mathscr{P}_{M/(C)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - R^2$.

$$MI^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 \text{ nên}$$

$$\mathscr{P}_{M/(C)} = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2$$

$$= x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + y_0^2 - 2by_0 + b^2 - (a^2 + b^2 - c).$$

Suy ra $\mathscr{P}_{M/(C)} = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c.$

Như vậy, giá trị của biểu thức $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$ *tại điểm* $(x_0; y_0)$ *là bằng phương tích của điểm* $M(x_0; y_0)$ *đối với đường tròn (C).*

$$\mathscr{P}_{M/(C)} = f(x_0; y_0).$$

4. Các vị trí tương đối

a) *Vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn*

Cho một đường tròn (C) và một điểm M, ta có các trường hợp sau :

$\mathscr{P}_{M/(C)} > 0 \quad \Leftrightarrow$ *M ở ngoài đường tròn (C);*

$\mathscr{P}_{M/(C)} = 0 \quad \Leftrightarrow$ $M \in (C)$;

$\mathscr{P}_{M/(C)} < 0 \quad \Leftrightarrow$ *M ở trong đường tròn (C).*

b) *Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn*

Cho đường tròn (C), tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ. Thế thì :

$d(I; \Delta) < R \quad \Leftrightarrow$ *Δ và (C) cắt nhau tại 2 điểm;*

$d(I; \Delta) = R \quad \Leftrightarrow$ *Δ và (C) tiếp xúc với nhau;*

$d(I; \Delta) > R \quad \Leftrightarrow$ *Δ và (C) không cắt nhau.*

c) *Vị trí tương đối của hai đường tròn*

Cho hai đường tròn (C) tâm I, bán kính R và đường tròn (C') tâm I', bán kính R'.

Ta có :

Liên hệ giữa II' với R, R'	*Vị trí tương đối của (C) và (C')*
$\lvert R - R' \rvert < II' < R + R'$	*Cắt nhau tại 2 điểm*
$II' = \lvert R - R' \rvert$	*Tiếp xúc trong*
$II' = R + R'$	*Tiếp xúc ngoài*
$II' > R + R'$	*Không cắt nhau (ngoài nhau)*
$II' < \lvert R - R' \rvert$	*Không cắt nhau (đựng nhau)*

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 39. Viết phương trình đường tròn trong các trường hợp sau :

a) Đi qua hai điểm A(5; 0) và B(1; 4) và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta : x + y - 3 = 0$.

b) Ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa các cạnh :

$$AB : 9x - 2y - 41 = 0;$$

$$BC : 7x + 4y + 7 = 0;$$

$$CA : x - 3y + 1 = 0.$$

c) Đi qua điểm M(2; 3) và tiếp xúc với hai đường thẳng :

$$\Delta_1 : 3x - 4y + 1 = 0;$$

$$\Delta_2 : 4x + 3y - 7 = 0.$$

d) Nội tiếp trong tam giác mà ba cạnh nằm trên ba đường thẳng :

$$\Delta_1 : x - 4 = 0;$$

$$\Delta_2 : 3x - 4y + 36 = 0;$$

$$\Delta_3 : 4x + 3y + 23 = 0.$$

Hướng dẫn

a) Gọi I(a; b) là tâm của đường tròn, ta có :

$$R = AI = BI \quad \Rightarrow \quad AI^2 = BI^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - 5)^2 + b^2 = (a - 1)^2 + (b - 4)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a - b - 1 = 0 \qquad (1)$$

Mặt khác $I \in \Delta \Leftrightarrow a + b - 3 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) cho ta a = 2; b = 1.

$$R^2 = AI^2 = 10.$$

Phương trình đường tròn cần tìm là :

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0.$$

b) Từ các giả thiết đã cho, ta tìm được tọa độ các đỉnh A(5; 2); B(3;–7); C(–1; 0) và đưa bài toán về việc viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A; B; C.

Ta có kết quả, phương trình đường tròn cần tìm là :

$$\left(x - \frac{31}{10}\right)^2 + \left(y + \frac{23}{10}\right)^2 = \frac{221}{10}.$$

c) Đường tròn (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 thì tâm I của nó phải nằm trên phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng. Mặt khác (C) đi qua M và tiếp xúc với Δ_1, Δ_2 nên ta lại phải có :

$$IM = d(I; \Delta_1).$$

Gọi I(a; b) là tâm của đường tròn (C).

$$MI^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2.$$

$$d(I;\Delta_1) = \frac{|3a-4b+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3a-4b+1|}{5}.$$

Từ đây, ta có $MI^2 = [d(I;\Delta_1)]^2$

$$\Leftrightarrow \quad (a-2)^2 + (b-3)^2 = \left(\frac{3a-4b+1}{5}\right)^2.$$

Thực hiện các phép tính và rút gọn, ta được :

$$16a^2 + 9b^2 - 24ab - 106a - 142b + 324 = 0.$$

$\Delta_1 : 3x - 4y + 1 = 0$ và $\Delta_2 : 4x + 3y - 7 = 0$ cắt nhau tạo thành bốn góc, có hai đường phân giác :

$$p_1 : 7x - y - 6 = 0;$$

$$p_2 : x + 7y - 8 = 0.$$

Ta xét hai trường hợp :

- Điểm I nằm trên phân giác p_1. Như vậy, ta có $7a - b - 6 = 0$

Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 7a - b - 6 = 0 & (1) \\ 16a^2 + 9b^2 + 24ab - 106a - 142b + 324 = 0 & (2) \end{cases}$$

Rút b từ (1) và thế vào (2). Sau khi rút gọn, ta đưa về phương trình bậc hai :

$$5a^2 - 16a + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2;\ a_2 = \frac{6}{5}.$$

* Với $a_1 = 2 \Rightarrow b_1 = 8$:

$$R^2 = MI^2 = (2-2)^2 + (8-3)^2 = 25$$

và được phương trình đường tròn

$$(C_1) : (x-2)^2 + (y-8)^2 = 25.$$

* Với $a_2 = \frac{6}{5} \Rightarrow b_2 = \frac{12}{5}$, ta tính được $R^2 = 1$

và được phương trình đường tròn

$$(C_2) : \left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{12}{5}\right)^2 = 1.$$

- Điểm I nằm trên phân giác p_2. Trường hợp này, tọa độ tâm I là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} a + 7b - 8 = 0 \\ 16a^2 + 9b^2 + 24ab - 106a - 142b + 324 = 0. \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm, không có đường tròn nào thỏa mãn yêu cầu.

Kết quả, ta có 2 đường tròn đi qua M(2; 3) và tiếp xúc với Δ_1, Δ_2.

$$(C_1) : x^2 + y^2 - 4x - 16y - 43 = 0;$$

$$(C_2) : 5x^2 + 5y^2 - 12x - 14y + 31 = 0.$$

Chú ý : Có thể dự đoán các kết quả trên đây bằng cách quan sát trên hình vẽ.

d) Ta tính được ba đỉnh của tam giác : A(3; –13); B(4; 12); C(–8; 3).

Phân giác trong góc A có phương trình : $3x + y + 1 = 0$.

Phân giác trong góc B có phương trình : $2x - y + 4 = 0$.

Tâm J của đường tròn nội tiếp là giao điểm của các phân giác trong nên tọa độ của J là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad J(-1; 2).$$

Bán kính r của đường tròn nội tiếp là khoảng cách từ tâm J đến một cạnh :

$$r = d(J; \Delta_1) = \frac{|-1 - 4|}{\sqrt{1}} = 5$$

và được phương trình đường tròn :

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A(–1; 1); B(2; –1); C(1; 3).

Gợi ý : $5x^2 + 5y^2 - 11x - 9y - 12 = 0$.

2. Viết phương trình đường tròn có tâm I(5; 5) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 3x + 4y - 5 = 0$.

3. Lập phương trình đường tròn có bán kính R = 1, tiếp xúc với trục Ox và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta : 3x - y + 7 = 0$.

Gợi ý : Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ 3x - y + 7 = 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y + 1 = 0 \\ 3x - y + 7 = 0. \end{cases}$$

Ta được hai đường tròn : $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1;$

$$\left(x + \frac{8}{3}\right)^2 + (y + 1)^2 = 1.$$

4. Lập phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $x - 3 = 0$, tiếp xúc với trục Oy và đi qua điểm A(5; 4).

5. Lập phương trình đường tròn đi qua điểm P(1; 0) và tiếp xúc với hai đường thẳng :

$$\Delta_1 : x + y - 2 = 0;$$

$$\Delta_2 : x + y + 3 = 0.$$

Gợi ý : Chú ý : $\Delta_1 // \Delta_2$.

6. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng :

$$\Delta_1 : 3x + 4y - 1 = 0;$$

$$\Delta_2 : 4x + 3y - 8 = 0;$$

và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta : 2x + y + 1 = 0$.

Gợi ý : $(C_1) : \left(x + \frac{16}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{25}{7}\right)^2 = \frac{81}{49};$

$(C_2) : (x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9.$

7. Viết phương trình đường tròn nội tiếp trong tam giác có ba cạnh nằm trên ba đường thẳng :

$$\Delta_1 : x - 2y - 5 = 0;$$

$$\Delta_2 : 2x - y + 2 = 0;$$

$$\Delta_3 : 2x + y - 10 = 0.$$

Gợi ý : $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0.$

8. Tìm độ dài của dây cung AB trong đó có các điểm A, B là giao điểm của đường thẳng $\Delta : 4x + 3y - 8 = 0$ với đường tròn (C) có tâm I(2; 1) tiếp xúc với đường thẳng $5x - 12y + 15 = 0$.

9. Lập phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $x - 2y = 0$

và chắn trên đường tròn $x^2 + y^2 - 8x = 0$ và một dây cung có độ dài bằng 2.

10. Cho ba điểm A(1; 2); B(9; -2); C(7; -4) và điểm D thỏa mãn hệ thức $\vec{AD} = \vec{CB}$.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn $(\mathscr{C})$.

b) Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ và chứng minh đường tròn $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với đường thẳng OA.

§6. Tiếp tuyến với đường tròn

Ta đã biết khoảng cách từ tâm I của đường tròn đến một đường thẳng Δ bằng bán kính R của đường tròn thì Δ và đường tròn tiếp xúc với nhau, do đó khi cho đường thẳng Δ : Ax + By + C = 0 và đường tròn (C) tâm I(a; b) bán kính R thì điều kiện cần và đủ để Δ và (C) tiếp xúc với nhau là :

$$\frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R.$$

Công thức này là kiến thức chủ yếu để giải quyết các bài toán liên quan đến tiếp tuyến, đặc biệt liên quan đến việc viết phương trình của tiếp tuyến với một đường tròn.

Ngoài ra, để giải các bài toán liên quan đến tiếp tuyến của đường tròn ta cần nhớ một tính chất quan trọng của tiếp tuyến là : "Tiếp tuyến với một đường tròn thì vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm".

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 40. Cho đường tròn (C) có phương trình :

$$(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm P(-1; 1).

b) Cho điểm Q(2; 5). Chứng minh rằng hai tiếp tuyến với đường tròn (C) kẻ từ điểm Q thì vuông góc với nhau. Viết phương trình các tiếp tuyến ấy.

Giải

a) Thế tọa độ của P(−1; 1) vào vế trái phương trình của (C) ta được :

$$(-1)^2 + 1^2 - 2(-1) - 4.1 = 1 + 1 + 2 - 4 = 0.$$

Vậy $P(-1; 1) \in (C)$.

Đường tròn (C) có tâm I(1; 2) và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi M là một điểm nằm trên tiếp tuyến Δ của đường tròn tại điểm P(−1; 1) thì với M(x; y) ta có :

$$\overrightarrow{PM} = (x + 1; y - 1) \quad \text{và} \quad \overrightarrow{IP} = (-2; -1).$$

Δ là tiếp tuyến của (C) tại I nên $\overrightarrow{IP} \perp \overrightarrow{PM}$

$$\Leftrightarrow \quad -2(x + 1) + (-1)(y - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x - y - 1 = 0.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại P là : $\Delta : 2x + y + 1 = 0$.

b) Xét đường thẳng Δ' đi qua Q(2; 5) và song song với Oy, Δ' có phương trình x = 2, hay x − 2 = 0.

Ta có: $d(I; \Delta') = |1 - 2| = 1$.

Vì $d(I; \Delta') < \sqrt{5}$ nên Δ' không tiếp xúc với đường tròn. Điều này có nghĩa là các tiếp tuyến với đường tròn (C) đi qua Q(2; 5) không có đường nào song song với trục tung. Do vậy, ta có thể gọi k là hệ số góc của các tiếp tuyến với đường tròn kẻ từ Q(2; 5). Ta lại có :

$$\mathscr{P}_{Q/(C)} = 2^2 + 5^2 - 2.2 - 4.5 > 0.$$

Do vậy điểm Q nằm ngoài đường tròn và qua Q ta có thể kẻ được hai tiếp tuyến với đường tròn, các tiếp tuyến ấy có phương trình dạng :

$$y - 5 = k(x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad kx - y - 2k + 5 = 0 \qquad (*)$$

Từ điều kiện tiếp xúc ta có : $\dfrac{|-k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5}$.

Bình phương cả hai vế và rút gọn, ta đưa về phương trình bậc hai :

$$2k^2 + 3k - 2 = 0.$$

Phương trình bậc hai này có a và c trái dấu nên có hai nghiệm.

Mặt khác tích của hai nghiệm là $k_1.k_2 = \frac{-2}{2} = -1$.

Vậy hai đường thẳng ứng các hệ số góc k_1, k_2 là hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Giải phương trình bậc hai đối với k, ta được : $k_1 = -2$; $k_2 = \frac{1}{2}$.

Đem thế các giá trị này vào phương trình (*) ta được hai tiếp tuyến xuất phát từ Q(2; 5) của đường tròn (C) :

$$\Delta_1 : 2x + y - 9 = 0;$$

$$\Delta_2 : x - 2y + 8 = 0.$$

Bài 41. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$.

Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn trong các trường hợp :

a) Có hệ số góc $k = -2$.

b) Song song với đường thẳng : $3x - 4y + 1 = 0$.

c) Vuông góc với đường thẳng : $-12x + 5y - 4 = 0$.

Hướng dẫn

a) Phương trình đường thẳng Δ có hệ số góc $k = -2$ là :

$$y = -2x + m \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y - m = 0.$$

Đường tròn (C) có tâm I(1; −3) và bán kính R = 4.

Δ tiếp xúc với (C), cho ta :

$$d(I; \Delta) = \frac{|2.1 + (-3) - m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{|-1 - m|}{\sqrt{5}} = 4 \quad \Rightarrow \quad 1 + m = \pm 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad m = -1 \pm 4\sqrt{5}.$$

Ta được hai tiếp tuyến với (C) :

$$\Delta_1 : 2x + y + 1 + 4\sqrt{5} = 0;$$

$$\Delta_2 : 2x + y + 1 - 4\sqrt{5} = 0.$$

b) Đường thẳng p song song với $3x - 4y + 1 = 0$ có phương trình dạng :

$$3x - 4y + c = 0.$$

Đường thẳng p tiếp xúc với đường tròn (C) cho ta :

$$d(I;\ p) = \frac{|3.1 - 4(-3) + c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4$$

$$\Rightarrow \quad 15 + c = \pm 4\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 5; \quad c_2 = -35.$$

Ta được hai tiếp tuyến : $p_1 : 3x - 4y + 5 = 0;$

$p_2 : 3x - 4y - 35 = 0.$

c) Đường thẳng q vuông góc với đường thẳng $-12x + 5y - 4 = 0$ có phương trình : $5x + 12y + c = 0$.

q tiếp xúc với (C) cho ta :

$$d(I;\ p) = \frac{|5.1 + 12(-3) + c|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 4$$

$$\Rightarrow \quad -31 + c = \pm 52 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 84; \quad c_2 = -21.$$

Ta được hai tiếp tuyến : $p_1 : 5x + 12y + 84 = 0;$

$p_2 : 5x + 12y - 21 = 0.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 = 2$.

a) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) tại các điểm thuộc (C) và có hoành độ bằng 1.

Có nhận xét gì về các tiếp tuyến này ?

b) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) xuất phát từ điểm A(4; −2).

Gợi ý :

a) $x + y - 2 = 0$ và $x - y - 2 = 0$. Hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

b) $x + y - 2 = 0$ và $x + 7y - 2 = 0$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ cho A(0; −2); B(4; 0) và đường thẳng Δ : $x + 2y = 0$.

a) Lập phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ.

b) Chứng minh hai điểm A, B là hai điểm xuyên tâm đối.

c) Viết các phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) có hệ số góc $k = 2$.

Tìm tọa độ các tiếp điểm.

Gợi ý :

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2; -1)$; $R = \sqrt{5}$.

Phương trình (C) : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

b) $\overrightarrow{IA} = (-2; -1)$; $\overrightarrow{IB} = (2; 1)$.

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow$ I là trung điểm của AB.

c) Đường thẳng Δ có hệ số góc $k = 2$ có phương trình : $2x - y + c = 0$.

Điều kiện : $d(I; \Delta) = R \Rightarrow \dfrac{|5 + c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

$\Rightarrow c = 0$ và $c = -10$.

Ta được hai tiếp tuyến : $\Delta_1 : 2x - y = 0$;

$\Delta_2 : 2x - y - 10 = 0$.

3. Cho ba điểm $A(2; 3)$; $B(-2; -1)$; $C(1; -1)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm A và tìm giao điểm của tiếp tuyến này với trục Ox.

Gợi ý :

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) $x^2 + y^2 + x - 3y - 6 = 0$.

c) $5x + 3y - 19 = 0$; $\left(\dfrac{19}{5}; 0\right)$.

4. Cho đường tròn (C) có phương trình : $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn đi qua điểm $M(4; 7)$.

b) Tính độ dài khoảng cách giữa hai tiếp điểm.

c) Tính góc giữa hai tiếp tuyến.

Gợi ý :

a) $\Delta_1 : 2x - y - 1 = 0;$

$\Delta_2 : -x + 2y - 10 = 0.$

b) Ta có hai tiếp điểm A(1; 1); A'(–2; 4) nên $AA' = 3\sqrt{2}$.

c) $143^0.08'$.

5. Cho hai đường tròn (C) và (C') :

$$(C) : x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0;$$

$$(C') : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0.$$

a) Xét vị trí tương đối của hai đường tròn.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Gợi ý :

a) Đường tròn (C) có tâm I(5; –12), bán kính R = 15.

(C') có tâm I'(1; 2), bán kính R' = 5.

Đường nối tâm $II' = 2\sqrt{53} \approx 14,6$.

Dễ thấy $R - R' < II' < R + R'$.

Vậy (C) và (C') cắt nhau tại 2 điểm.

Chú ý : Có thể xét vị trí tương đối của (C) và (C') bằng cách xét s nghiệm của hệ phương trình bậc 2 hai ẩn :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \\ 2x - 7y + 9 = 0 \end{cases}$$

b) Gọi Δ là đường thẳng $y = ax + b \Leftrightarrow ax - y + b = 0$.

Để Δ tiếp xúc với đường tròn (C) :

$$d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|5a + 12 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 15 \qquad 1)$$

Để Δ tiếp xúc với đường tròn (C') :

$$d(I'; \Delta') = R \Leftrightarrow \frac{|a - 2 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 5 \qquad 2)$$

Từ (1) và (2) ta đi đến hai hệ :

* Hệ (I) : $\begin{cases}(a+b-2)^2 = 25(a^2+1)\\ a-b+9=0\end{cases}$

Giải hệ này, ta được : $a_1 = \dfrac{14+10\sqrt{7}}{21} \Rightarrow b_1 = \dfrac{203+10\sqrt{7}}{21}$;

$a_2 = \dfrac{14-10\sqrt{7}}{21} \Rightarrow b_2 = \dfrac{203-10\sqrt{7}}{21}$.

và được 2 tiếp tuyến chung : $\Delta_1 : y = \dfrac{14+10\sqrt{7}}{21}x + \dfrac{203+10\sqrt{7}}{21}$;

$\Delta_2 : y = \dfrac{14-10\sqrt{7}}{21}x + \dfrac{203-10\sqrt{7}}{21}$.

* Hệ (II) : $\begin{cases}(a+b-2)^2 = 25(a^2+1)\\ 3a+2b-3=0\end{cases}$

Hệ này vô nghiệm.

Tóm lại, ta có hai tiếp tuyến chung Δ_1, Δ_2.

6. Cho ba điểm A(1; 2); B(9; −2); C(7; −4).

a) Chứng minh ba điểm A, B, C là các đỉnh của một tam giác vuông.

b) Một điểm D thỏa mãn hệ thức : $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}$.

Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn (I).

Viết phương trình đường tròn (I).

c) Chứng minh rằng đường tròn (I) tiếp xúc với đường thẳng OA tại điểm A.

d) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (I) tại điểm B.

Gợi ý :

a) So sánh các vectơ $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ và tính tích vô hướng $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

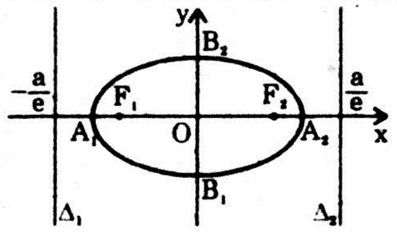
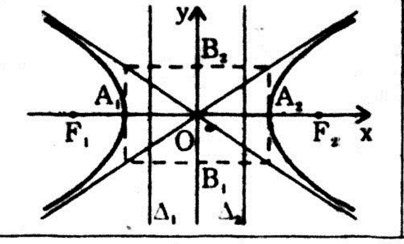
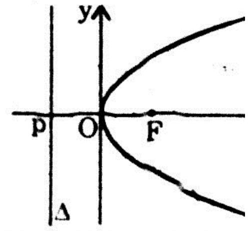
b) (I) : $x^2 + y^2 - 10x - 5 = 0$.

c) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{CB} = 0$.

d) $2x - y - 20 = 0$.

§7. Các đường conic

1. Các yếu tố cơ bản trong các phương trình chính tắc của Elip Hypebol - Parabol

Conic Yếu tố	*Elip*	*Hypebol*	*Parabol*
Phương trình chính tắc	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b > 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2px$ $p > 0$
Các trục	*Trục lớn* $2a$ *Trục nhỏ* $2b$ *Tiêu cự* $2c$; $c^2 = a^2 - b^2$	*Trục thực* $2a$ *Trục ảo* $2b$ *Tiêu cự* $2c$; $c^2 = a^2 + b^2$	*Tham số tiêu*
Tiêu điểm	$F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$	$F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$	$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$
Đỉnh	$A_1(-a; 0)$; $A_2(a; 0)$ $B_1(0; -b)$; $B_2(0; b)$	$A_1(-a; 0)$; $A_2(a; 0)$ $B_1(0; -b)$; $B_2(0; b)$	*Đỉnh là gốc t* *độ* $O(0; 0)$
Tâm sai	$e = \frac{c}{a} < 1$	$e = \frac{c}{a} > 1$	$e = 1$
Bán kính qua tiêu	$MF_1 = a + \frac{cx}{a}$ $MF_2 = a - \frac{cx}{a}$	$MF_1 = \left\lvert a + \frac{cx}{a} \right\rvert$ $MF_2 = \left\lvert a - \frac{cx}{a} \right\rvert$	$MF = \left\lvert x + \frac{p}{2} \right\rvert$
Đường chuẩn	$\Delta_1 : x + \frac{a}{e} = 0$ $\Delta_2 : x - \frac{a}{e} = 0$	$\Delta_1 : x + \frac{a}{e} = 0$ $\Delta_2 : x - \frac{a}{e} = 0$	$\Delta : x + \frac{p}{2} =$
Tiệm cận	*Elip là một đường cong giới nội, không có tiệm cận*	$y = \pm \frac{b}{a} x$	*Không có tiệm cận*
Hình dạng	 y B₂ -a/e a/e F₁ F₂ A₁ O A₂ x B₁ Δ₁ Δ₂		

Chú ý : Các đường $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ cũng được gọi là các đường parabol.

2. Định nghĩa của đường conic

Cho một điểm cố định F và đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số $\frac{MF}{d(M, D)} = e$ ($e > 0$, không đổi) là một đường conic.

F được gọi là tiêu điểm;

Δ được gọi là đường chuẩn;

e được gọi là tâm sai.

Với $e < 1$ conic là đường Elip;

$e = 1$ conic là đường Parabol;

$e > 1$ conic là đường Hypebol.

Đối với các đường conic, ta thường gặp hai loại toán chủ yếu :

a) Viết phương trình chính tắc của conic

- *Đối với elip và hypebol thì việc viết phương trình chính tắc đưa về việc tìm các yếu tố a, b. Hai đường conic này có 4 yếu tố quan trọng là tiêu cự, tâm sai và trục lớn, trục nhỏ đối với elip (hoặc trục thực, trục ảo đối với hypebol) và giữa bốn yếu tố này lại có 2 liên hệ, do vậy chỉ cần biết hai trong bốn yếu tố này là ta tìm được hai yếu tố còn lại. Đôi khi, ta dựa vào định nghĩa tổng quát để viết phương trình conic.*
- *Đối với parabol thì việc viết phương trình chính tắc chủ yếu đưa về việc tìm tham số trên p.*

b) Tìm các yếu tố của conic

Đối với bài toán này, ta dựa vào các định nghĩa và dựa vào hai liên hệ giữa a, b, c và a, c, e.

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 42. a) Viết phương trình chính tắc elip (E) biết (E) đi qua điểm $M\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ và có tâm sai $e = \frac{1}{2}$.

b) Tìm độ dài trục lớn, trục nhỏ, tọa độ các tiêu điểm của (E) ?

Hướng dẫn

a) Phương trình chính tắc của elip có dạng (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Vì M ∈ (E) nên : $\frac{(1)^2}{a^2} + \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 9a^2 + 4b^2 = 4a^2.b^2 \qquad (1)$$

Mặt khác : $e = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad b^2 = \frac{3}{4}a^2 \qquad (2)$$

Ta có a^2, b^2 là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 9a^2 + 4b^2 = 4a^2b^2 \\ b^2 = \frac{3}{4}a^2 \end{cases}$

Giải hệ này ta có : $a^2 = 4$, $b^2 = 3$ và được elip (E) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

b) Ta có : $a^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad 2a = 4$.

$b^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 2b = 2\sqrt{3}$.

$c^2 = a^2 - b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1$.

Vậy $F_1(-1; 0)$; $F_2(1; 0)$.

Bài 43.

a) Viết phương trình chính tắc hypebol (H) biết rằng điểm M(3; –1) thuộc (H) và (H) tiệm cận với các đường phân giác của các góc tọa độ.

b) Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua điểm N(4; 6) và có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của (H) trên đây.

Hướng dẫn

a) Phương trình chính tắc của hypebol có dạng (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

M(3; –1) ∈ (H) cho ta :

$$\frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 9b^2 - a^2 = a^2b^2 \qquad (1)$$

Hypebol lại nhận các phân giác $y = \pm x$ làm tiệm cận, nên :

$$\frac{a}{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = b \qquad (2)$$

Từ 1) và (2) suy ra : $a^2 = 8$; $b^2 = 8$ và ta được phương trình chính tắc của hypebol là :

$$(H) : \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

b) Hypebol (H) có : $c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad c = 4.$

Do đó (H) có hai tiêu điểm : $F_1(-4; 0)$; $F_2(4; 0)$.

Elip (E) đi qua N(4; 6) nên :

$$\frac{16}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 16b^2 + 36a^2 = a^2b^2 \qquad (3)$$

Elip (E) nhận F_1, F_2 làm tiêu điểm nên có c = 4.

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad 16 = a^2 - b^2 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), ta tìm được : $a^2 = 64$, $b^2 = 48$ và được phương trình chính tắc của elip (E) là :

$$(E) : \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1.$$

Bài 44. Cho điểm $F\left(-2\sqrt{2}; 0\right)$ và đường thẳng $\Delta : x + 3\sqrt{2} = 0$.

a) Chứng tỏ rằng quỹ tích các điểm M có tỉ số khoảng cách từ đó đến điểm F và từ đó đến đường thẳng Δ bằng một số không đổi $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$ là một elip (E).

b) Viết phương trình chính tắc của parabol (P) có đỉnh trùng với gốc tọa độ và có tiêu điểm trùng với tiêu điểm bên phải của elip (E).

Hướng dẫn

Gọi tọa độ của M là (x; y), ta có : $MF^2 = \left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 + y^2$;

$$d(M; \Delta) = \left|x + 3\sqrt{2}\right|.$$

Vì theo giả thiết : $\dfrac{MF}{d(M;\ \Delta)} = e \quad \Rightarrow \quad \dfrac{MF^2}{d^2(M;\ \Delta)} = e^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x + 2\sqrt{2})^2 + y^2}{(x + 3\sqrt{2})^2} = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 3(x^2 + 4x\sqrt{2} + 8 + y^2) = 2(x^2 + 6x\sqrt{2} + 18)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 3y^2 = 12$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Vậy quỹ tích các điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là elip :

$$(E) : \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

b) Elip (E) có : $a^2 = 12;\ b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$.

Tiêu điểm bên phải của elip (E) là : $F'\left(2\sqrt{2};\ 0\right)$.

Suy ra parabol có tham số tiêu : $\dfrac{p}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow p = 4\sqrt{2}$.

Vậy phương trình parabol cần tìm là : $y^2 = 8\sqrt{2}x$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho elip có phương trình : $(E) : 4x^2 + 16y^2 = 64$.

a) Đưa phương trình elip (E) về dạng chính tắc.

b) Tìm độ dài trục lớn, trục nhỏ, tiêu cự.

c) Chứng minh rằng với một điểm $M \in (E)$ thì tỉ số khoảng cách từ M đến tiêu điểm F_2 của (E) và đến đường thẳng $\Delta : x - \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ là một s không đổi.

Gợi ý :

c) Gọi tọa độ của M là $(x_M;\ y_M)$; MF_2 là bán kính qua tiêu điểm F_2 nên

$$MF_2 = a - \frac{c}{a}x_M = a - e.x_M = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_M$$

$$\Rightarrow \quad MF_2 = \frac{8 - \sqrt{3}x_M}{2}.$$

$$MH = \frac{8\sqrt{3}}{3} - x_M = \frac{8 - \sqrt{3}x_M}{\sqrt{3}}.$$

$$\frac{MF_2}{MH} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{không đổi}.$$

Chú ý : $\frac{MF_2}{MH}$ chính là tâm sai e của (E).

2. Cho điểm F(4; 0) và đường thẳng (D) có phương trình :

$$(D) : 4x - 9 = 0.$$

a) Chứng minh rằng quỹ tích các điểm M mà tỉ số khoảng cách từ M đến F và từ M đến (D) bằng $\frac{4}{3}$ là một hypebol (H).

b) Tìm độ dài trục thực, độ dài trục ảo, các tiệm cận của hypebol.

Gợi ý : a) (H) : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$.

3. a) Viết phương trình elip (E) biết (E) đi qua điểm $M\left(\sqrt{5}; 12\sqrt{5}\right)$ và có $a - b = 2$.

b) Đường tròn (C) đi qua điểm A(4; 2) và có tâm I(0; 1).

Viết phương trình đường tròn (C) và chứng minh (C) đi qua hai tiêu điểm của (E).

4. Trong mặt phẳng $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ cho điểm F(3; 0) và đường thẳng (D) : $3x - 4y + 16 = 0$.

a) Viết phương trình parabol (P) có tiêu điểm F và nhận gốc tọa độ O làm đỉnh.

b) Chứng tỏ rằng parabol (P) cắt (D) tại một điểm duy nhất I. Tìm tọa độ I.

Gợi ý : a) (P) : $y^2 = 12x^2$.

b) Hệ : $\begin{cases} 3x - 4y + 16 = 0 \\ y^2 - 12x = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất : $I\left(\frac{16}{3}; 8\right)$.

5. Cho hai điểm $A\left(\frac{7}{2}; 1\right)$; $B\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

a) Viết phương trình đường tròn đường kính AB và tìm tọa độ giao điểm của đường tròn với các trục tọa độ.

b) Viết phương trình parabol (P) nhận điểm $F\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ làm tiêu điểm và nhận đường thẳng (D) : $y + 1 = 0$ làm đường chuẩn. Điểm B có thuộc parabol không ?

c) Đường thẳng $\Delta : 2x - 2y - 3 = 0$ cắt parabol (P) tại 2 điểm M, N.

Tìm tọa độ của M, N và tính góc $\widehat{MFN}$?

(Đề thi tốt nghiệp THPT – 1978)

Gợi ý :

a) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Đường tròn tiếp xúc với trục Ox tại $A\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ cắt trục Ox tại $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$; $C\left(0; \frac{9}{2}\right)$.

b) Ta có : $MF = d(M; D) \quad \Rightarrow \quad MF^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2$.

$[d(M; D)]^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$.

$MF^2 = [d(M; D)]^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x - 2y + \frac{13}{4} = 0$

$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)^2$.

Điểm $B \in (P)$.

c) M, N có tọa độ là nghiệm của hệ : $\begin{cases} y = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)^2 \\ 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad M\left(\frac{3}{2}; 0\right); \quad N\left(\frac{11}{2}; 4\right)$.

$$\cos \widehat{MFT} = -\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \widehat{MFT} \approx 124^\circ 56'.$$

6. Trong mặt phẳng Oxy cho elip (E) có phương trình : $3x^2 + 5y^2 = 30$.

a) Xác định tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm và tâm sai của elip.

b) Một đường thẳng Δ đi qua tiêu điểm $F_2(2; 0)$ của elip (E) song song với trục tung, cắt (E) tại hai điểm A, B. Tính các khoảng cách từ A và từ B tới tiêu điểm F_1.

(Trích đề thi tốt nghiệp THPT, năm học 1996 – 1997)

Gợi ý : b) Tọa độ các điểm A, B là nghiệm của hệ : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{6} = 1 \\ x - 2 = 0. \end{cases}$

$$AF_1 = BF_1 = \frac{7\sqrt{10}}{5}.$$

7. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $M_1\left(3; 2\sqrt{3}\right)$; $M_2\left(-6; \sqrt{3}\right)$.

a) Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua M_1, M_2. Tìm tọa độ các tiêu điểm của (E).

b) Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) đi qua M_1 và có các tiêu điểm trùng với các tiêu điểm của elip (E). Viết phương trình các đường tiệm cận của hypebol (H).

(Trích đề thi tốt nghiệp THPT, năm học 1997 – 1998, kì II)

Gợi ý : a) (E) : $\dfrac{x^2}{15} + \dfrac{y^2}{45} = 1$.

b) (H) : $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{24} = 1$.

8. **Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm A(2; 3); B(–2; 1).**

a) **Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm nằm trên trục hoành.**

b) **Viết phương trình chính tắc của parabol có đỉnh là gốc tọa độ, đi qua điểm A và nhận trục hoành làm trục đối xứng.**

Vẽ đường tròn và parabol tìm được trên cùng một hệ trục tọa độ.

(Trích đề thi tốt nghiệp THPT, năm học 1997 – 1998)

Gợi ý : a) (E) : $x^2 + y^2 - 7x - 9 = 0$.

b) (P) : $y^2 = \frac{9}{2}x$.

§8. Các bài toán có tham số

Khi trong phương trình của các đường có chứa một tham số m thì thường thường ta hay gặp một số bài toán cơ bản sau :

1. Biện luận vị trí tương đối của các đường

a) Biện luận vị trí tương đối của hai đường thẳng

Để biện luận vị trí tương đối của hai đường thẳng được cho dưới dạng phương trình tổng quát :

$$\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0;$$

$$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Ta tính các định thức :

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}; \quad D_x = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad D_y = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$$

và xét các trường hợp :

* $D \neq 0 \Rightarrow \Delta_1$ *và* Δ_2 *cắt nhau.*

* $D = 0 \Rightarrow$ *α)* D_x *(hoặc* D_y*)* $\neq 0 \Rightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$.

β) $D_x = D_y = 0 \Rightarrow \Delta_1 \equiv \Delta_2$.

Chú ý : *Số giao điểm của* Δ_1, Δ_2 *bằng số nghiệm của hệ phương trình :* $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$.

b) Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Để biện luận vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn, ta so sánh khoảng cách từ tâm I của đường tròn đến đường thẳng Δ *với bán kính R của đường tròn.*

$d(I; \Delta) > R \Rightarrow \Delta$ *không cắt đường tròn;*

$d(I; \Delta) = R \Rightarrow \Delta$ *tiếp xúc với đường tròn;*

$d(I; \Delta) < R \Rightarrow \Delta$ *cắt đường tròn tại hai điểm.*

c) Vị trí tương đối của hai đường tròn

Để biện luận vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$ *và* $(O'; R')$ *ta so sánh đoạn nối tâm* OO' *và tổng* $R + R'$ *và hiệu* $|R - R'|$.

2. Xác định giá trị tham số m để một điều kiện nào đó được thỏa mãn

- *Xác định giá trị tham số m để đường thẳng (hoặc đường tròn hoặc conic) đi qua một điểm* $P(x_0; y_0)$ *cho trước. Muốn vậy, ta thế tọa độ của P vào phương trình đã cho và được một phương trình với tham số.*

- *Xác định giá trị tham số để đường thẳng song song hoặc vuông góc với một đường thẳng đã cho.*

- *Xác định giá trị tham số để đường thẳng* Δ *tiếp xúc với đường tròn, ta có thể xuất phát từ điều kiện* $d(I; \Delta) = R$ *hoặc tìm điều kiện để phương trình hoành độ giao điểm* ***có nghiệm kép****. Trong trường hợp phương trình hoành độ (hoặc phương trình tung độ giao điểm) là phương trình bậc hai thì điều kiện này được biểu hiện ở chỗ biệt thức của nó bằng 0.*

3. Tìm điểm cố định mà các đường đi qua

Để tìm điểm cố định mà các đường của một họ đi qua, ta viết phương trình đã cho dưới dạng một phương trình mà ẩn là tham số m :

$$mf(x; y) + g(x; y) = 0$$

và có tọa độ của điểm cố định mà họ đường đi qua là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ g(x; y) = 0. \end{cases}$$

4. Bài toán quỹ tích

Ta thường gặp bài toán tìm quỹ tích giao điểm P của hai đường thẳng, tìm quỹ tích tâm I của các đường tròn, hoặc tìm quỹ tích trung điểm M của một đoạn thẳng AB thay đổi...

Đối với bài toán này, ta biểu diễn các tọa độ $(x; y)$ *của điểm cần tìm quỹ tích theo tham số m :*

$$\begin{cases} x = f(m) \\ y = g(m). \end{cases}$$

Khử m giữa x, y, ta được một hệ thức giữa x, y độc lập đối với tham số m. Đó chính là phương trình quỹ tích của điểm cần tìm.

BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 45. Cho đường thẳng Δ có phương trình :

$$\Delta : (m-2)x + (m-6)y + m - 1 = 0, \text{ m là tham số.}$$

1. Tìm giá trị của tham số m trong các trường hợp :

a) Δ đi qua gốc tọa độ.

b) Δ đi qua điểm P(1; –3).

c) Δ song song với đường thẳng $\Delta_1 : 3x - 2y + 1 = 0$.

d) Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta_2 : 5x + 4y - 17 = 0$.

2. Tìm điểm cố định mà họ đường thẳng Δ luôn đi qua.

Hướng dẫn

1.a) Đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ O(0; 0), cho ta :

$$(m-2).0 + (m-6).0 + m - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1.$$

b) Δ đi qua P(1; –3) :

$$1(m-2) - 3(m-6) + m - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 15.$$

c) Để $\Delta // \Delta_1$ ta cần có :

$$\frac{m-2}{3} = \frac{m-6}{-2} \neq \frac{m-1}{1} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{22}{5}.$$

d) Để $\Delta \perp \Delta_2$ ta cần có :

$$5(m-2) + 4(m-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{34}{9}.$$

2. Ta có : $(m-2)x + (m-6)y + m - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (x + y + 1)m - (2x + 6y + 1) = 0.$$

Tọa độ điểm cố định A và đường thẳng luôn đi qua là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + 6y + 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\left(\frac{1}{4}; -\frac{5}{4}\right).$$

Bài 46.

a) Tùy theo giá trị tham số m, biện luận số giao điểm của hai đường thẳng :

$$\Delta_1 : 2(m-1)x + y - 2 = 0; \quad m \neq 1.$$

$$\Delta_2 : (m-2)x + (m-1)y - 3 = 0; \quad m \neq 2.$$

b) Trong trường hợp hai đường thẳng cắt nhau, tìm quỹ tích giao điểm P của hai đường thẳng.

Hướng dẫn

a) Ta có : $D = \begin{vmatrix} 2(m-1) & 1 \\ m-2 & m-1 \end{vmatrix} = 2(m-1)^2 - (m-2) = m\,(2m-5).$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ m-1 & -3 \end{vmatrix} = 2m - 5.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 2(m-1) \\ -3 & m-2 \end{vmatrix} = 2(2m-5).$$

+ Với $m \neq 0$ và $m \neq \frac{5}{2}$, Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại điểm P có :

$$x_P = \frac{1}{m}; \quad y_P = \frac{2}{m}.$$

+ Với $m = 0$ ta có : $\Delta_1 : -2x + y - 2 = 0$

$$\Delta_2 : \frac{9}{2}x + \frac{3}{2} - 3 = 0$$

$\Rightarrow \quad \Delta_1 \equiv \Delta_2.$

b) Với $m \neq 0$ và $m \neq \frac{5}{2}$ ta có : $x_P = \frac{1}{m}$; $y = \frac{2}{m} \Rightarrow y = 2x.$

$\Rightarrow$ **Quỹ tích giao điểm P là đường thẳng : $2x - y = 0$.**

Bài 47. Cho ba đường thẳng : $\Delta_1 : 2x - 3y - 11 = 0;$

$\Delta_2 : 5x + 2y + 1 = 0;$

$\Delta_3 : (m-2)x + 3my - 4 = 0;$

trong đó m là tham số.

Xác định giá trị tham số m trong các trường hợp sau :

a) $\Delta_3 \parallel \Delta_1$.

b) $\Delta_3 \perp \Delta_2$.

c) Ba đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ đồng quy.

Hướng dẫn

a) $\Delta_3 \,//\, \Delta_1$ khi : $\dfrac{m-2}{2} = \dfrac{3m}{-3} \neq \dfrac{-11}{1} \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{2}{3}$.

b) $\Delta_3 \perp \Delta_2$ khi : $5(m-2) + 2(3m) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{10}{11}$.

c) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tai điểm I có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x - 3y - 11 = 0 \\ 5x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I(1; -3).$$

Ba đường thẳng Δ_3, Δ_2, Δ_1 đồng quy khi Δ_3 đi qua I, cho ta :

$$(m-2).1 + 3.(-3)m - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{6}{7}.$$

Bài 48. Trong mặt phẳng tọa độ $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ cho họ đường cong có phương trình : $(C) : x^2 + y^2 - 2(m+1)x - 2(m+2)y + 6m + 7 = 0$, trong đó m là tham số.

a) Xác định giá trị tham số m để họ đường cong đã cho là các đường tròn.

b) Tìm quỹ tích tâm I của các đường tròn khi m thay đổi.

c) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn thuộc họ đã cho mà tiếp xúc với trục Oy.

Hướng dẫn

a) Ta có : $a = m + 1$; $\quad b = m + 2$; $\quad c = 6m + 7$.

$$a^2 + b^2 - c = (m+1)^2 + (m+2)^2 - (6m+7) = 2m^2 - 2.$$

Để các đường cong (C) là đường tròn thì

$$2m^2 - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < -1 \text{ hoặc } m > 1.$$

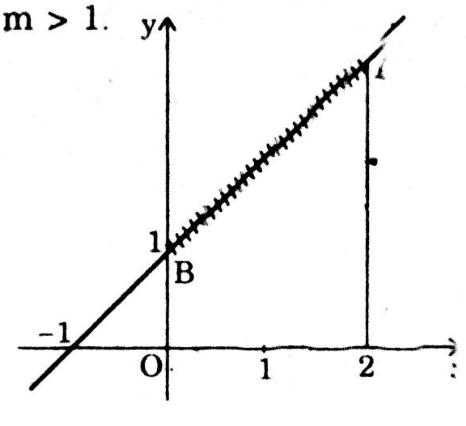
b) Ta có tâm $I(m+1; m+2)$ tức là :

$$x_I = m + 1; \qquad y_I = m + 2.$$

Dễ thấy $\quad y_I = m + 2 = (m + 1) + 1$

$\Rightarrow \quad y_I = x_I + 1$

$\Rightarrow \quad x - y + 1 = 0$ với $x < 0$, $x > 2$.



Vậy quỹ tích tâm I của các đường tròn thuộc họ đường cong (C) là hai đoạn thẳng thuộc đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$, ứng với các giá trị $x < 0$, $x > 2$ (tức là các điểm thuộc Δ, trừ đoạn thẳng AB).

c) Khoảng cách từ tâm I đến trục tung là $|m + 1|$. Đường tròn tiếp xúc với Oy, cho ta :

$$|m + 1| = R \Leftrightarrow \quad |m + 1| = \sqrt{2m^2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 - 2 = (m + 1)^2 \Leftrightarrow \quad m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m_1 = -1 \text{ (loại)}; \quad m_2 = 3.$$

Với $m = 3$, ta được đường tròn : $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$ có tâm $I(4; 5)$, bán kính $R = 4$.

Bài 49. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 9 = 0$ và đường thẳng $\Delta : y = m(x + 1) + 2$.

Biện luận theo giá trị tham số m, vị trí tương đối của Δ và (C).

Hướng dẫn

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -3)$ và bán kính $R = 1$.

Khoảng cách từ I đến Δ : $\quad d(I; \Delta) = \dfrac{|2m + 5|}{\sqrt{m^2 + 1}}$.

Ta có các trường hợp :

a) $d(I; \Delta) > R \Rightarrow \quad \dfrac{|2m + 5|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1 \quad \Rightarrow \quad 3m^2 + 20m + 24 > 0$

$$\Rightarrow \quad m < \frac{-10 - 2\sqrt{7}}{3} \text{ hoặc } m > \frac{-10 + 2\sqrt{7}}{3}$$

thì Δ và (C) không cắt nhau.

b) $d(I; \Delta) = R \Rightarrow \quad 3m^2 + 20m + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{-10 \pm 2\sqrt{7}}{3}$

$\Rightarrow$ Δ và (C) cắt nhau tại 1 điểm duy nhất.

Trong trường hợp này, người ta cũng nói Δ tiếp xúc với đường tròn (C) hay Δ là tiếp tuyến của (C).

c) $d(I; \Delta) < R \Rightarrow \quad 3m^2 + 20m + 24 < 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{-10 - 2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{-10 + 2\sqrt{7}}{3}.$$

$\Rightarrow$ Δ và (C) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

Chú ý : Ta có thể giải như sau :

Thế $y = m(x + 1) + 2$ vào phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 9 = 0$ ta được *phương trình hoành độ giao điểm* của Δ và (C) và bài toán được đưa về việc biện luận theo tham số nghiệm của một phương trình bậc 2 đối với ẩn x. Cách này nhìn chung là phức tạp, phải tính toán nhiều do vậy dễ nhầm lẫn.

Bài 50.

a) Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết tiêu cự bằng 2 và độ dài trục lớn là 4.

b) Biện luận số giao điểm của elip (E) với đường thẳng Δ đi qua điểm P và có hệ số góc là k.

Hướng dẫn

a) Ta có : $2c = 2 \Rightarrow c = 1;$

$2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a^2 = 4;$

$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 4 - 1 = 3.$

Ta được phương trình chính tắc của elip (E) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

b) Phương trình đường thẳng Δ là : $y = kx - 3$ (1)

Từ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta được phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (E) là :

$$(3 + 4k^2)x^2 - 24kx + 24 = 0.$$

Xét biệt thức $\Delta' = 48k^2 - 72$, ta có :

* Với $k < -\frac{\sqrt{6}}{3}$ hoặc $k > \frac{\sqrt{6}}{3}$ thì Δ cắt (E) tại 2 điểm phân biệt.

* Với $k = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ thì Δ cắt (E) tại một điểm (điểm kép). Trong trường hợp này Δ cắt (E) tại 2 điểm trùng nhau, ta nói A tiếp xúc với (E) hay Δ là tiếp tuyến của (E).

* Với $-\frac{\sqrt{6}}{3} < k < \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \Delta$ và (E) không cắt nhau.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1 Cho hai đường thẳng : $\Delta_1 : m(x - 2) + y - 3 = 0;$

$\Delta_2 : m(x + 2) - y + 3 = 0.$

a) Chứng tỏ Δ_1 luôn đi qua một điểm cố định A; Δ_2 luôn đi qua một điểm cố định B.

b) Viết phương trình đường thẳng AB.

c) Trường hợp Δ_1 và Δ_2 cắt nhau, tìm quỹ tích giao điểm M.

2. Tùy theo giá trị tham số m, biện luận về vị trí tương đối của các cặp đường thẳng :

a) $\Delta : (m + 1)x + 5y + m = 0;$

$\Delta' : 2x + (2m + 3)y + 1 = 0.$

b) $\Delta : mx + y - m + 1 = 0;$

$\Delta' : 4x + my - 2 = 0.$

Gợi ý : a) $m \neq 1$ và $m \neq -\frac{7}{2}$, Δ và Δ' cắt nhau tại 2 điểm.

$m = 1 \Rightarrow \Delta \equiv \Delta'.$

$m = -\frac{7}{2} \Rightarrow \Delta \,//\, \Delta'.$

b) $m \neq \pm 2 \Rightarrow \Delta$ và Δ' cắt nhau tại 2 điểm.

$m = -2 \Rightarrow \Delta \,//\, \Delta'.$

$m = 2 \Rightarrow \Delta \equiv \Delta'.$

3. Trong mặt phẳng $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ cho họ đường cong (C) :

$$(C) : m(x^2 + y^2) - 2(2m + 1)x + 2y + 2m + 1 = 0;$$

trong đó m là tham số.

a) Xác định giá trị m để họ đường cong đã cho là đường tròn.

b) Tìm quỹ tích tâm I của họ đường tròn.

c) Với những giá trị nào của m thì ta được các đường tròn không chứa điểm P(–1; 3).

Gợi ý : a) $m \neq 0$.

b) Quỹ tích tâm I là đường thẳng $\Delta : x + y - 2 = 0$, trừ điểm M(2; 0).

c) $m = -1$ hoặc $m = -2$ thì $R = 1$. Ta có hai đường tròn :

$$(C_{-1}) : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0;$$

$$(C_{-2}) : x^2 + y^2 - 3x - y + \frac{3}{2} = 0.$$

d) $m > -\frac{9}{16}$.

4. Cho họ đường cong có phương trình :

$$(C) : x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0.$$

a) Chứng tỏ rằng với mọi giá trị của m thì họ đường cong đã cho là họ các đường tròn.

b) Xác định các giá trị của tham số m để các đường tròn trên luôn tiếp xúc với đường thẳng $x + y - 2 = 0$.

c) Xác định giá trị của tham số m để các đường tròn trên tiếp xúc với đường tròn (O; 1).

d) Tìm quỹ tích tâm I của họ đường tròn đã cho.

Gợi ý :

a) $a^2 + b^2 - c = 5m^2 + 2m + 6 > 0 \ \forall m$.

b) Tâm $I(m + 1; 2m)$. Khoảng cách từ I đến đường thẳng $x + y - 2 = 0$ là : $\frac{|3m - 1|}{\sqrt{2}}$.

Ta còn có : $\frac{|3m + 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{5m^2 + 2m + 6} \quad \Rightarrow \quad m = -5 \pm \sqrt{14}$.

c) Phương trình đường tròn (O; 1) là : $x^2 + y^2 = 1$.

Tọa độ giao điểm của (C) và (O) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0. \end{cases}$$

Từ đây, ta đi đến phương trình tung độ giao điểm :

$$(5m^2 + 2m + 1)y^2 - 8my - m^2 - 2m + 3 = 0 \qquad (*)$$

Để hai đường tròn tiếp xúc với nhau thì (*) phải có nghiệm kép, hay biệt thức $\Delta'_m = (m + 1)^3(5m - 3) = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = \frac{3}{5}$.

d) Phương trình quỹ tích I : $2x + y - 2 = 0$.

5. Trong mặt phẳng Oxy cho họ đường tròn có phương trình :

$$(C) : x^2 + y^2 - (m - 2)x + 2my - 1 = 0.$$

a) Chứng minh rằng họ đường tròn (C) luôn đi qua hai điểm cố định A, B.

b) Cho $m = -2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C_2) từ điểm $P(0; -1)$.

Gợi ý :

a) Tọa độ của A, B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A(-2; -1); \quad B\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right).$$

b) Với $m = -2$ ta được đường tròn : $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$.

6. a) Lập phương trình của hypebol (H), biết $a + b = 7$ và một trong hai đường tiệm cận của hypebol có phương trình : $3x - 4y = 0$.

b) Biện luận số giao điểm của (H) với đường thẳng Δ song song với đường thẳng $(d) : 5x - 4y + 10 = 0$.

Viết phương trình của Δ trong trường hợp Δ cắt (H) tại một điểm duy nhất ?

Gợi ý :

a) $(H) : \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

b) Phương trình đường thẳng Δ có dạng : $\Delta : 5x - 4y + 4m = 0$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{5}{4}x + m.$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (H) :

$$2x^2 + 5mx + 2m^2 + 18 = 0.$$

Biệt thức $\Delta' = 9(m^2 - 16)$.

Do đó :

* $m < -4$ hoặc $m > 4 \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow \Delta$ và (H) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

* $-4 < m < 4 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow \Delta$ và (H) không cắt nhau.

* $m = \pm 4 \Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow \Delta$ và (H) cắt nhau tại 2 điểm trùng nhau (vì

phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép). Ta cũng nói Δ tiếp xúc với (H). Ta có đường thẳng Δ tiếp xúc với (H) :

+ Với m = 4 $\Rightarrow$ $\Delta_1 : 5x - 4y + 16 = 0$;

+ Với m = −4 $\Rightarrow$ $\Delta_2 : 5x - 4y - 16 = 0$.

7. Trong mặt phẳng Oxy cho elip có phương trình : $x^2 + 4y^2 = 4$

a) Tìm tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm và tâm sai.

b) Đường thẳng qua một tiêu điểm của elip và song song với trục Oy cắt elip tại hai điểm M và N. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

c) Tìm giá trị k để đường thẳng $y = x + k$ cắt elip đã cho.

(Trích đề thi tốt nghiệp THPT, năm học 1994 - 1995)

Gợi ý : c) $|k| \leq \sqrt{5}$.

8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường hypebol với phương trình :

$$3x^2 - y^2 = 12.$$

a) Tìm tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm, tâm sai và phương trình các đường tiệm cận của hypebol.

b) Tìm các giá trị của tham số k để đường thẳng $y = kx$ cắt hypebol nói trên.

(Trích đề thi tốt nghiệp THPT, năm học 1992 - 1993)

Gợi ý : a) $|k| < \sqrt{3}$.

MỤC LỤC

Chương I. VECTƠ

§1. Các định nghĩa 3
§2. Các phép toán vectơ 7
§3. Trục tọa độ 17
§4. Hệ trục tọa độ 22

Chương II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ – ỨNG DỤNG

§1. Giá trị lượng giác của góc bất kì (từ 0^0 đến 180^0) 30
§2. Tích vô hướng của hai vectơ 35
§3. Hệ thức lượng trong tam giác 47

Chương III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. Phương trình đường thẳng 58
§2. Quan hệ song song trong mặt phẳng 67
§3. Quan hệ vuông góc trong mặt phẳng 70
§4. Góc giữa hai đường thẳng và khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng 78
§5. Phương trình đường tròn 86
§6. Tiếp tuyến với đường tròn 93
§7. Các đường conic 100
§8. Các bài toán có tham số 108

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@ vnu.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập: THANH LOAN
Sửa bài: PHƯƠNG THẢO
Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

ĐỂ HỌC TỐT HÌNH HỌC THPT 10

Mã số: 1L-85 ĐH2006
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Xí nghiệp in Tuần báo Văn nghệ Tp. Hồ Chí Minh
Số xuất bản: 203 - 2006/CXB/13 - 27/ĐHQGHN ngày 20/03/2006
Quyết định xuất bản số: 224 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2006.